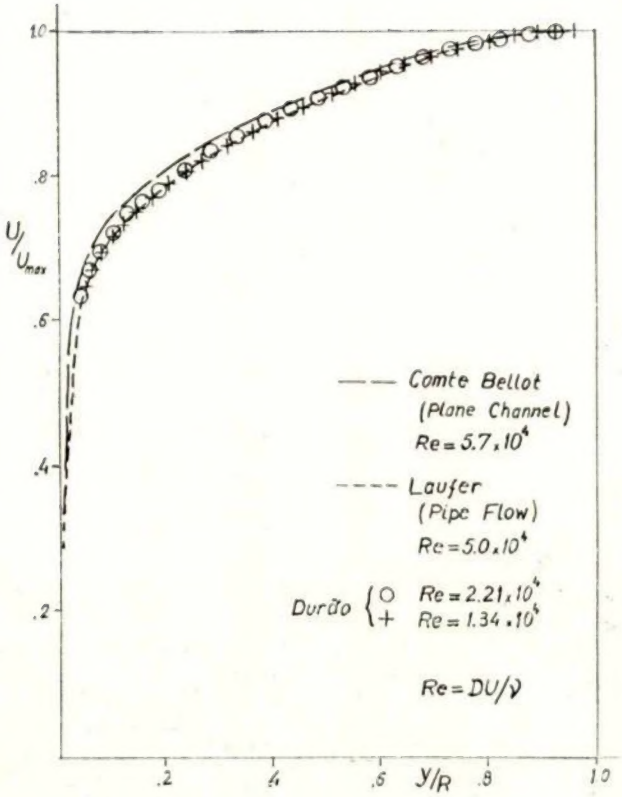



Fig. 2 — $U/U_{max}$ as a function of y/R

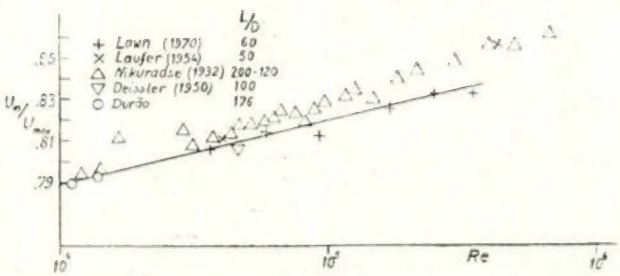



Fig. 3 — Ratio of mean to maximum velocity as a function of Re

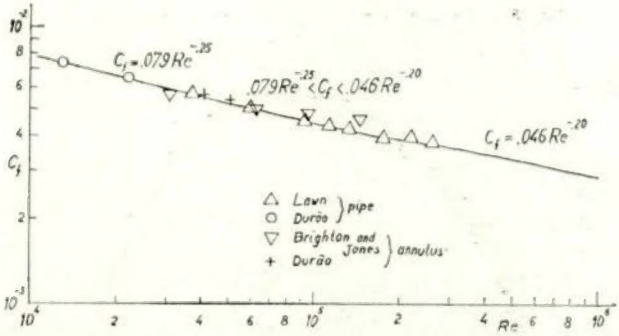



Fig. 5 — Skin friction factor as a function of Reynolds number

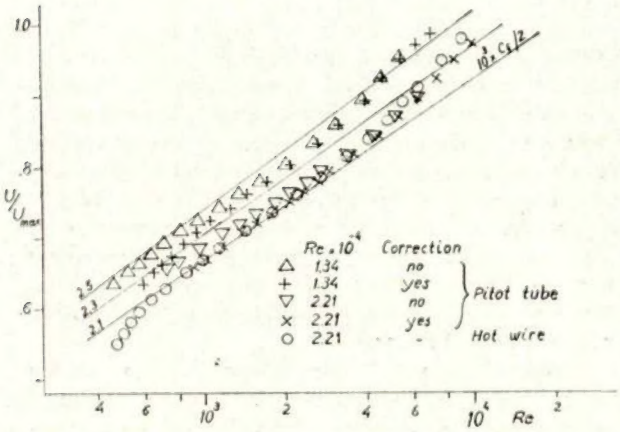



Fig. 4 — Clauser Chart: pitot tube and hot wire measurements

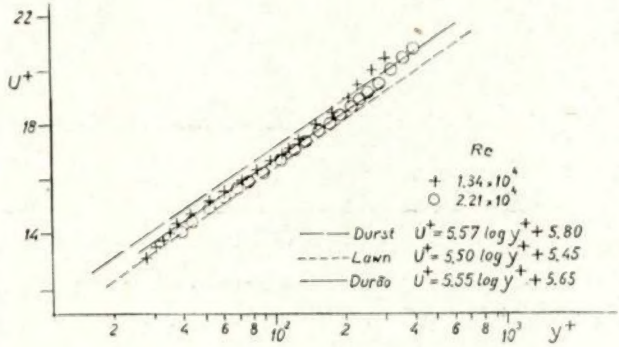



Fig. 6 — Logarithmic Law (pipe)

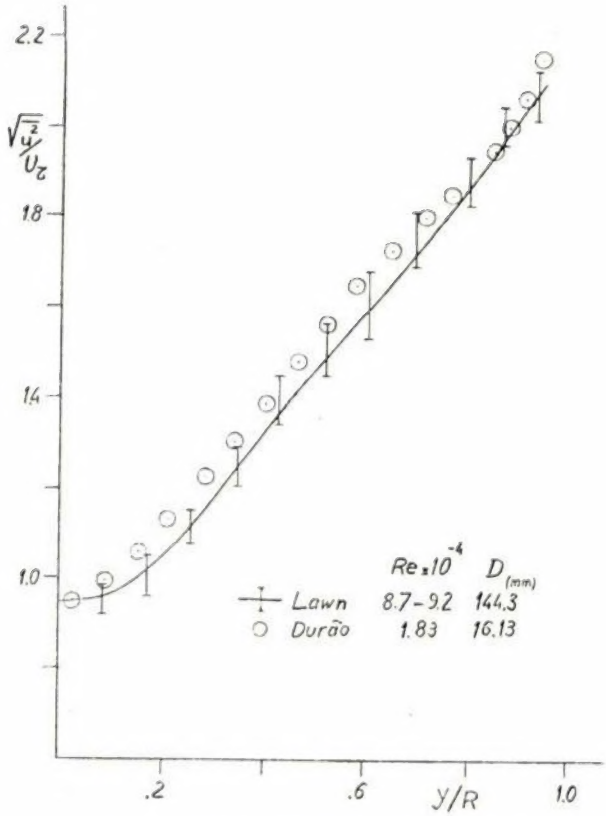
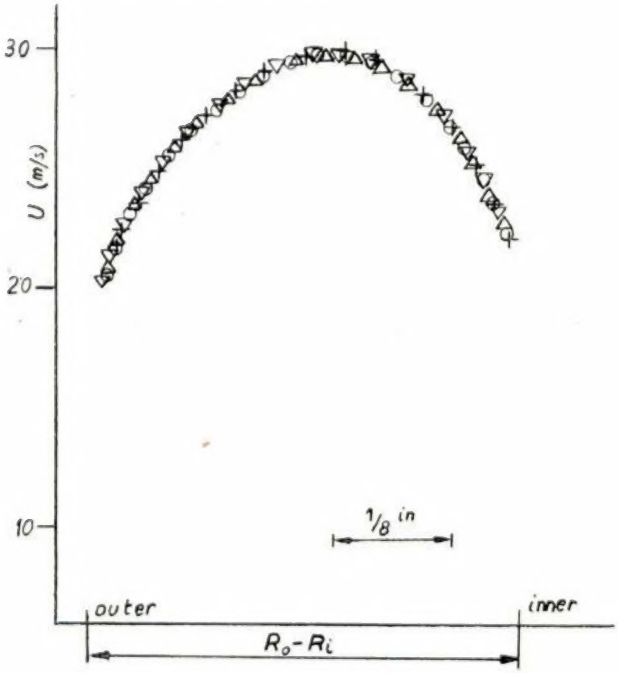



Fig. 7 — Flutuating velocity as a function of Y/R

Fig. 8 — Annulus velocity as a function of radial distanto




Annulus $\alpha = .483$ $Re = 4.06 \times 10^4$

+ Horizontal Right

Δ » Left

∇ Vertical Upper

o » Lower

$Re = (D_o - D_i)U/\nu$

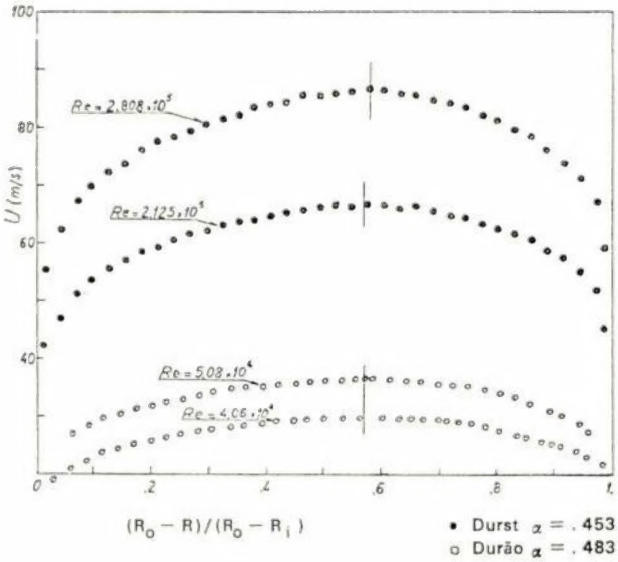



Fig. 9 — Velocity as a function of $(R_o - R)/(R_o - R_i)$

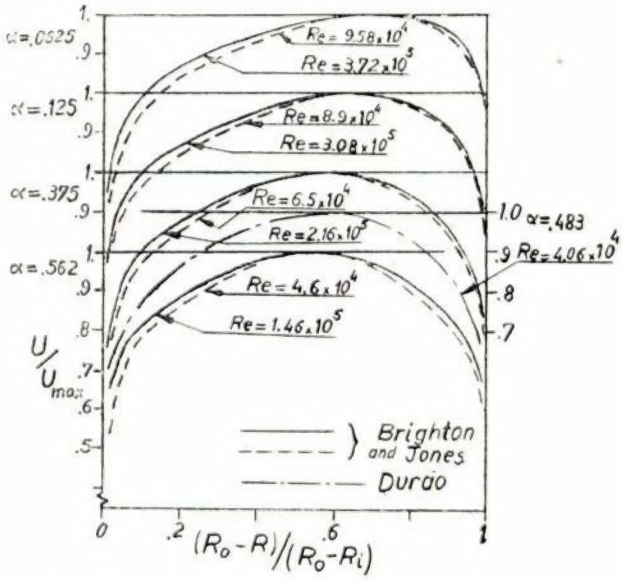



Fig. 10 — $U/U_{max}$ as a function of $(R_o - R)/(R_o - R_i)$

investigators. In figure 6 the logarithm law is verified. Figure 7 show the variation of the longitudinal fluctuating velocity with radial distance and comparison is made with Lawn results. The values obtained have the same relative but slightly higher. This fact agrees with the variation of fluctuating velocity at the centre line of the pipe with Reynolds number as given by coantic [4]. Tse results shown on figures 2 to 7 demonstrate that the flow emerging from the pipe is in good agreement with previous measurements and corresponds to fully developed pipe flow.

Measurements at 5 mm upstream of the exit the annulus are presented on figures 8 to 13. Figure 8 demonstrates the symmetry of the flow by super-imposing measured profiles obtained 90° apart around the

annulus. The maximum deviation at the maximum velocity, is less than 1,0%. Figue 9 shows profiles for two Reynalds numbers and relates them to the measurements of Durst [6]. Figure 10 makes a similar comparison with the measurements of Brighton and Jones [2]. The annular flow has two important parameters to be considered: Reynolds number and the inner to outer diameter ratio. The comparison became then more difficult but in spite of this it can be seen that the location of the maximum velocity is consistant with the results presented by other investigators. The mean velocity curves in general have very close agreement. Figure 11 presents profiles for two Reynolds numbers and for the inner and outer wall of the annulus on $u^+ - y^+$ co-ordinates and comparison with the measurements of Quarmby [15] and Brighton and Jones is made in Figures 12. The variation of the longitudinal fluctuating velocity with radial distance is shown in figure 13 and comparison is made with the results of Lawn and Elliott [13] and Brighton and Jones. Again, the results indicate that the flow is in good agreement with measurements obtained by previous workers and that it can safely be considered fully developed annulus flow. It is clear from the measurements that the three pin support does not significantly influence the mean profiles at the annulus exit.

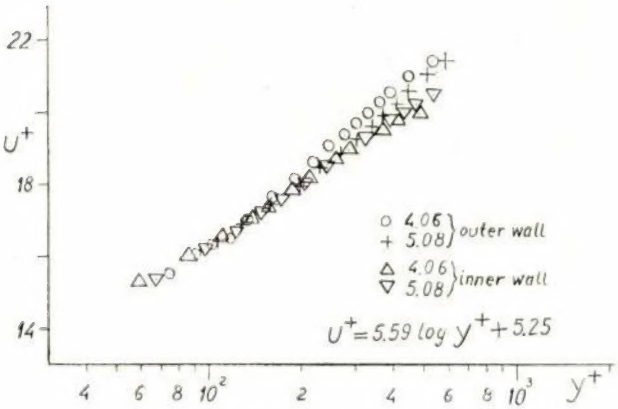



Fig. 11 — Logarithmic law (annulus)

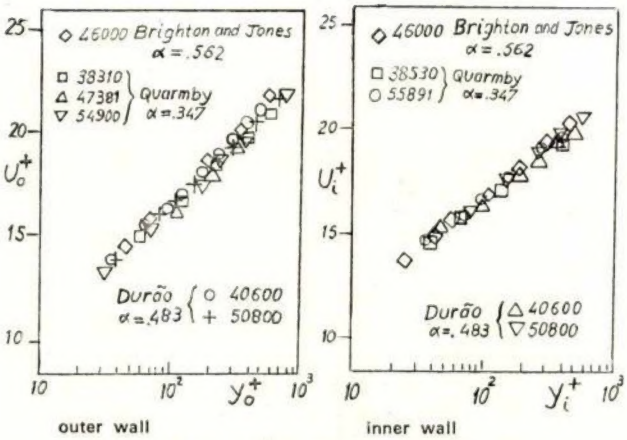



Fig. 12 — $U^+$ as a function of $y^+$

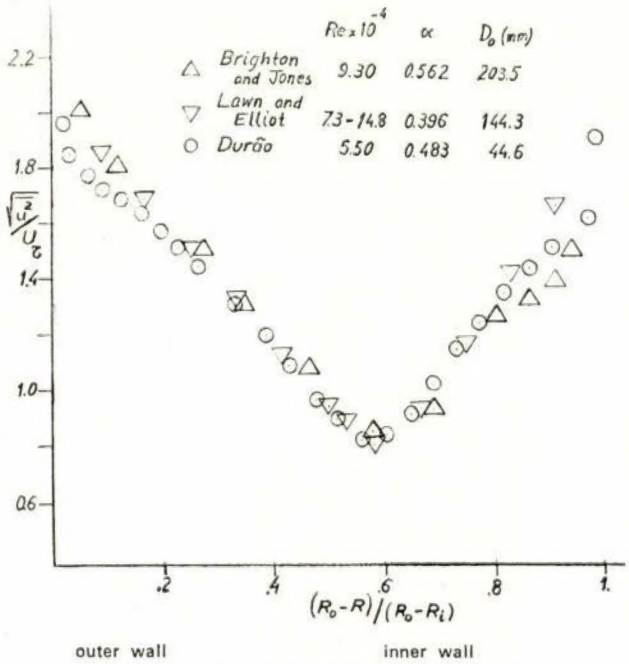



Fig. 13 — Flutuating velocity as a function of $(R_o - R)/(R_o - R_i)$

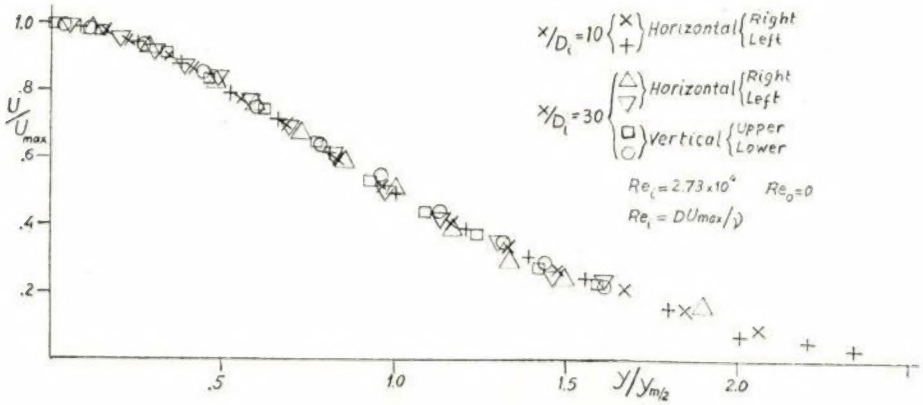



Fig. 14 — $U/U_{max}$ $(y/y_{m2})$ — Round jet

### 3.2 *Downstream jet flow*

The symmetry of the jet is confirmed by figures 14 to 16 which, for velocity ratios of 0,1.72 and 14,65 respectively superimpose vertical and horizontal profiles of mean velocity at downstream distances of 10 and 30 diameters. The deviation is less than 2% and may be considered very satisfatory.

Figure 17 shows the superposition of mean-velocity measurements at $x/D_i = 30$ ($X/D_o = 10.86$) for different Reynolds number ratios and it can be seen that similarity of mean-velocity profiles has been obtained. The figure shows $U/U_{max}$ as a function of $y/x$ and allows comparison with the round-jet measurement of Hinze [10], Rodi [16], and Wygnanski and Fiedler [17]. Measurements in the fully developed region of a

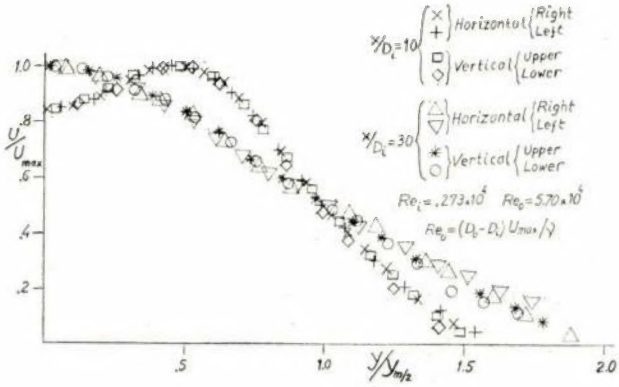



Fig. 15 — $U/U_{max}$ $(y/y_{m2})$

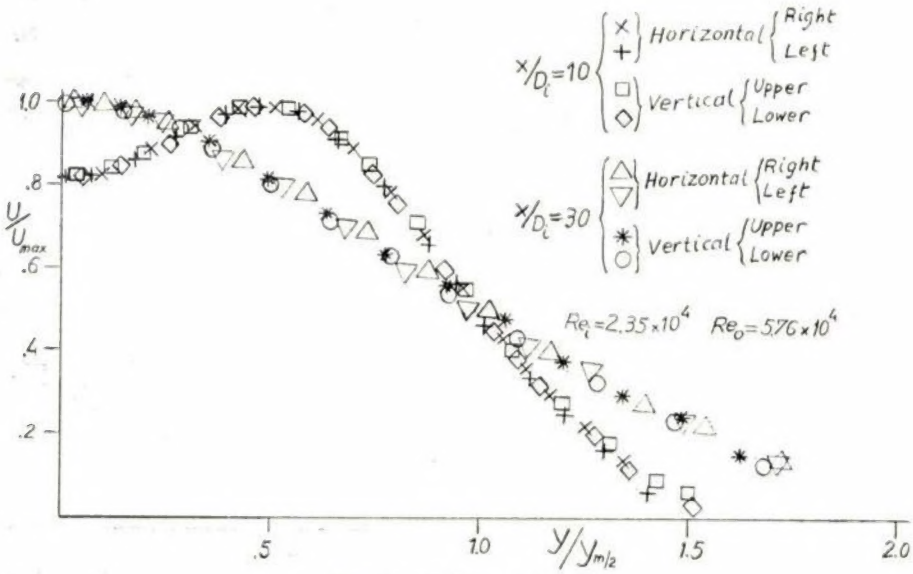



Fig. 16 — $U/U_{max}$ $(y/y_{m2})$

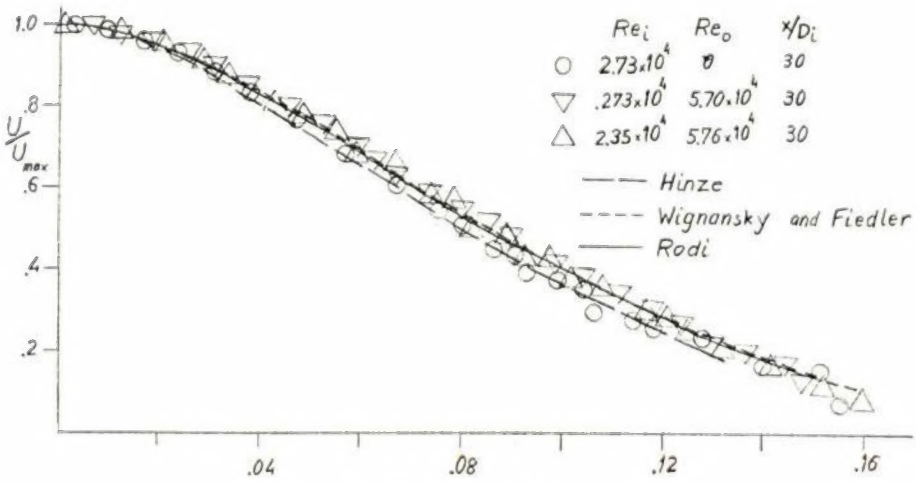



Fig. 17 — $U/U_{max}$ $(y/x)$

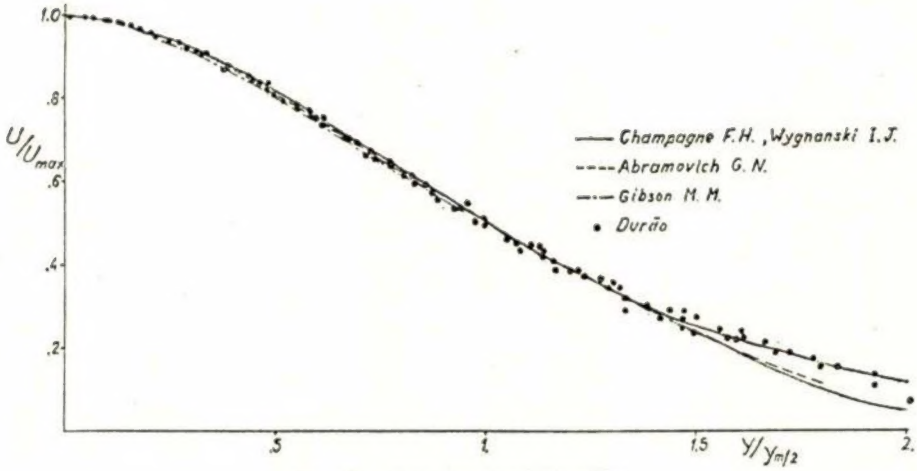
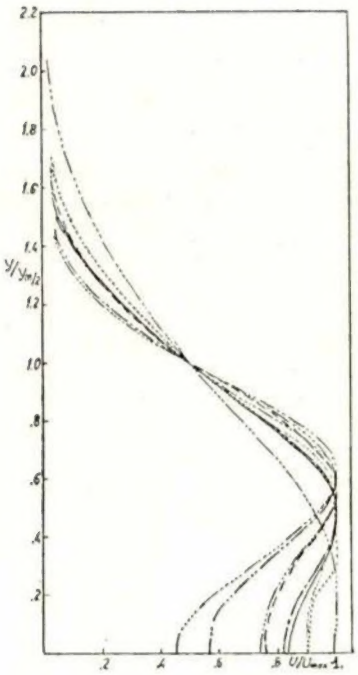



Fig. 18 — Fully developed Round jet




| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Re_i \times 10^4$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2.35 | 0.273 |
| $Re_e \times 10^4$ | 9.6 | 9.6 | 9.6 | 9.6 | 9.6 | 9.6 | 9.6 | 9.6 | 5.76 | 5.7 |
| $x/D_e$ | 2.14 | 3.09 | 4.07 | 6.05 | 6.05 | 3.09 | 2.14 | 4.07 | 3.62 | 3.62 |
| $x/D_i$ | 4.26 | 6.15 | 8.11 | 12.05 | 12.05 | 6.15 | 4.26 | 8.11 | 10 | 10 |
| $U_i/U_e$ | 10 | 10 | 10 | 10 | 5 | 5 | 5 | 5 | 1.72 | 14.65 |
| | Champagne F., Wygnanski I. | | | | | | | | Durão | |

Fig. 19 — $U/U_{max}$ $(y/y_{m/2})$

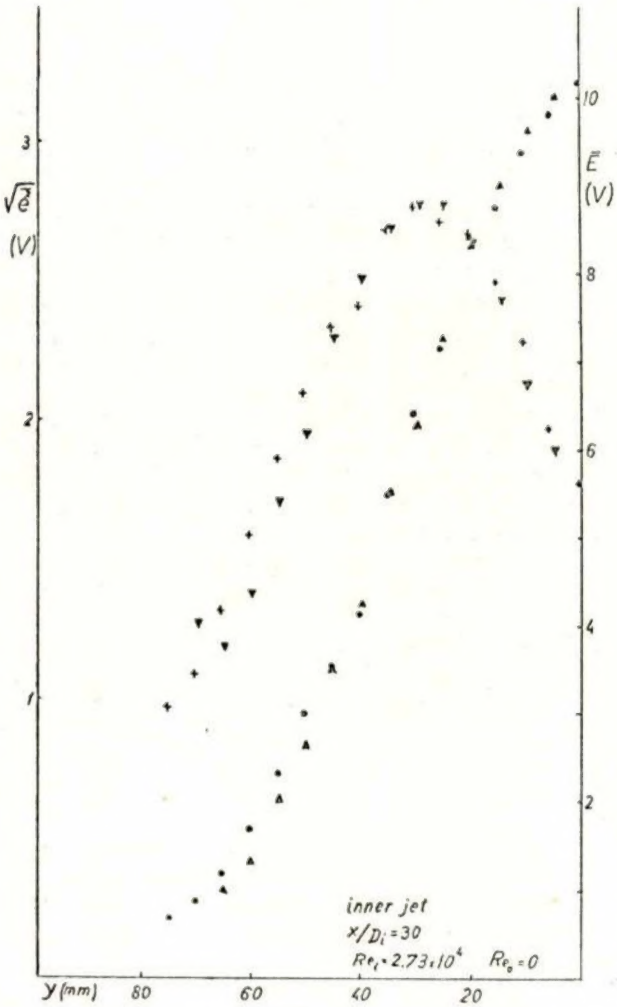



Fig. 20 — $\overline{E}$ and $\sqrt{\overline{e^2}}$ function of radial distance

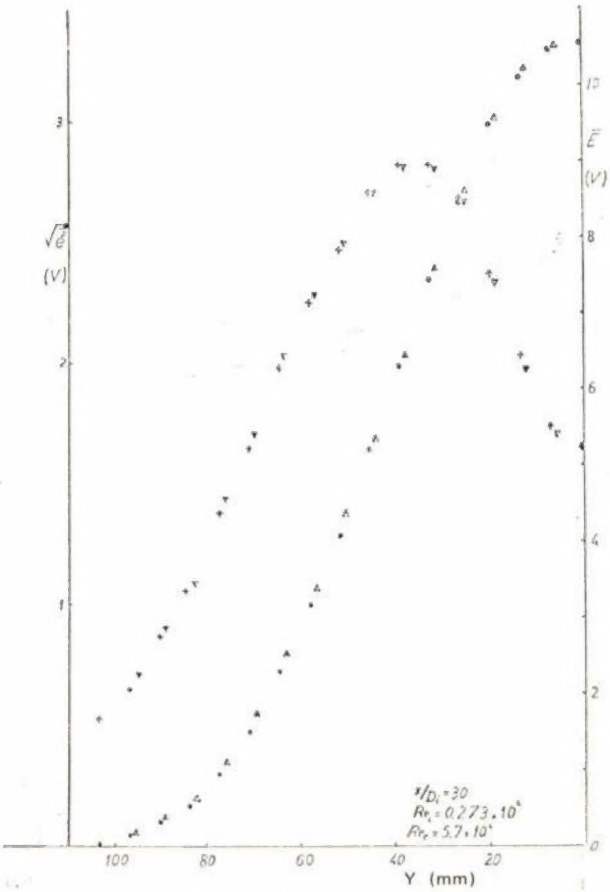



Fig. 21 — $\overline{E}$ and $\sqrt{\overline{e^2}}$ function of radial distance

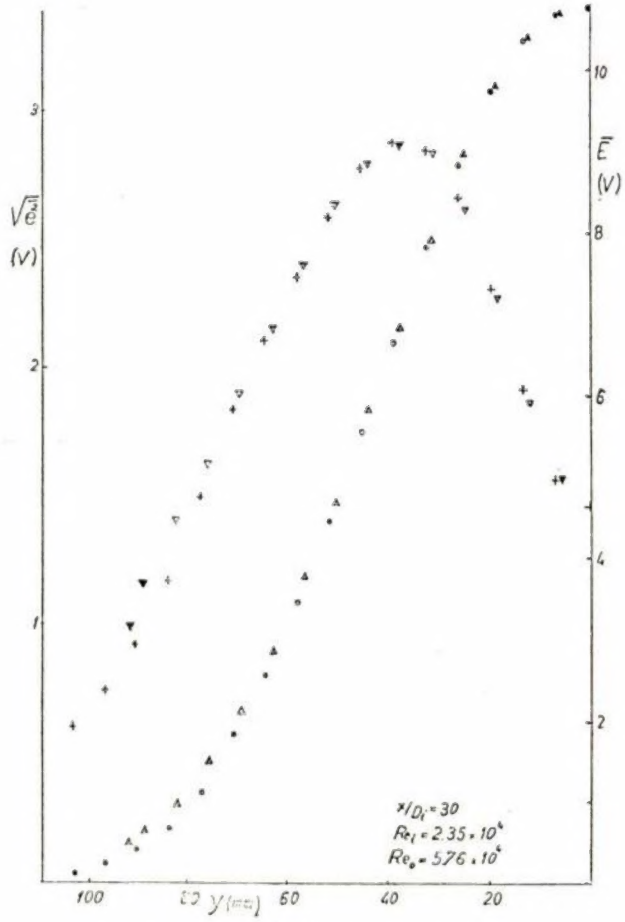



Fig. 22 — $\overline{E}$ and $\sqrt{\overline{e^2}}$ function of radial distance

round jet are compared with abramovich [1], champagne and Wygnanski [3] and Gibson [9] results in figure 18. Figure 19 shows the present measurements compared with the results of Champagne and Wygnanski; the inflence of $U_o / U_i$ ratio on the spread of the inner potential core can be seen; it is also clear that, with a higher initial intensity of turbulence, the self preserving flow is reached more rapidly than with a lower initial intensity of turbulence. (*)

Hot-wiret transverses made at 30 diameters downstream for three different Reynolds number ratios are reproduced on figures 20 to 22 and again show a very satisfatory symmetry. On these figures the signal E and $\overline{e^2}$ corresponding to the mean and rms components of turbulence indicate a maximum deviation less than 2%.

## 4 *CONCLUSIONS*

(a) Mean velocity measurements at Reynolds number from $1.70 \times 10^4$ to $5.08 \times 10^4$ show that the pipe annulus flows are fully developed at the exit. The agreement with measurements of other investigators is excellent.

(b) The maximum discrepancy between measurements of mean velocity at $x/D_i$ equal to 0, 10 and 30 at each of four quadrants is less than 2%. The rms signal at $x/D_i = 30$ again measured on each of the four quadrants, also reveals discrepancies less than 2%. The concentricity of the two jets is therefore confirmed.

(c) The mean velocity profiles show that the jet is fully developed at $x/D_i = 30$ ($x/D_o = 10.86$).

(d) The self-preserving jet flow is reached more rapidly with higher initial intensities of turbulence.

(e) The support pins do not significantly influence the mean profiles at the annulus exit nor the rms signal at a downstream distance equal to 10.86 outer diameters.

## 5. *FUTURE WORK*

(a) Hot wire measurements obtained in the free jet situation and presented in this report have not been evaluated in terms of fluctuating velociies. The turbulence intensities occuring in the present flow configuration include values in excess of 20% and necessitate approximate means of signal analysis. The means of converting the electrical signal into mean fluctuating

(*) More detailed discussed in reference 18.

velocity values is presently being coded according to the suggestion of reference 7, 8 and 16.

(b) The measurements will be extented and detailed investigation of the normal and Reynolds stresses will carry on in the co-axial developing region. These measurements will assist the development of a turbulence model.

Additional measurements with the laser anemometer will be effected in the present flow configurations. These cannot be specified until the above program is completed. (*)

## REFERENCES


[ 1 ] — ABRAMOVICH G. N. — «The Theory of Turbulent Jets». MIT Press (1963).

[ 2 ] — BRIGHTON J. A., JONES J. B. — «Fully developed Turbulent Flow in Annuli» J. Basic Engineering 835-844 (1964).

[ 3 ] — CHAMPAGNE F. H., WYGNANSKY I. J. — «Coaxial Turbulent Jets» Boeing Scientific Research Laboratories D1-82-0958 (1970).

[ 4 ] — COANTIC M. — A Study of Turbulent pipe flow and of the structure of its viscous sublayer. 4 th Euromech Col. «Structure of turbulence» (1967).

[ 5 ] — COMTE-BELLOTG. — «Contribution a l 'Etude de la Turbulence de Conduite» Ph. D. Thesis, Faculte des l'Universite de Grenoble (1963).

[ 6 ] — DURST F. — «On Turbulent Flow through Annular Passages with Smooth and Rough Cores» M. Sc Thesis, Mechanical Engineering Department, Imperial College (1968).

[ 7 ] — DURST F. — «An Introduction to Application of Hot-wire Anemometry for Turbulent Flow Investigations» Lecture M. Sc. Course, Mechanical Engineering Department, Imperial College (1970).

[ 8 ] — DURST F. — Private Communication.

[ 9 ] — GIBSON M. M. — «Spectra of Turbulence in a Round Jet». J. Fluid Mechanics, 15, 161-173, (1963).

[10] — HINZE J. O. — «Turbulence». Mc Graw Hill (1959).

[11] — LAUFER J. — «The Structure of Turbulence in Fully developed Pipe Flow». NACA TN 2954 (1953).

[12] — LAWN C. J. — «Aplication of the Turbulence Energy Equations to fully developed flow in simple ducts figures and figure captions». Central Electricity Generating Board. RD/B/R 1575 (A), (B), (C) (1970).

[13] — LAWN C. J. and ELLIOTT C. J. — Fully developed turbulent flow through concentric annuli — C. E. G. B., RD/B/N 1878 (1971).

[14] — MACMILLAN F. A. — «Experiments on Pitot-tube in Shear Flow». Aero. Research Council, R. and M. 3028 (1956).

[15] — QUARMBY A. — «An Experimental Study of Tubulent Flow though Concentric Annuli». I. J. Mech. Eng. Sci., 9, 205-221, (1967).

[16] — RODI W. — «A New Method of Evaluating Hot-wire Signals in Highly Turbulent Flow and its Testing in a Round Jet». To be published.

[17] — WYGNANSKI I., FIEDLER H. — «Some Measurements in the Self Preserving Jet». J. Fluid Mechanics, 38, 3, 577-612. (1969).

[18] — DURÃO D. F. G. — Turbulent mixing of co-axial jets. — M. Sc Thesis, Mechanical Engineering Department, Imperial College (1971).

[19] — DURÃO D. and J. H. WHITELAW — Turbulent Mixing in the developing region of co-axial jets. — Mechanical Engineering Department, Imperial Colleg, ET/TN/A/19 (1972). Accepted for publication by ASME.

[20] — RIBEIRO M. M. — Turbulent mixing of co-axial jets. S. Sc. Tsesis, Mechanical Engineering Department, Imperial College (1972).


## ACKNOWLEDGEMENT


The author wishes to express his deep gratitude to Professor J. J. Delgado Domingos of the Instituto Superior Tecnico (Portugal) for this continuing help and advice.

The author is also indebted to Dr. J. H. Whitelaw of Imperial College for initiating this project, for his patient and attentive supervision.

Acknowledgement is gratefully made to «Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica» for the award of a «NATO» scholarship.


## NOMENCLATURE

| | |
|---|---|
| $C_f$ | = skin friction factor |
| D | = pipe diameter. |
| $E = \bar{E} + e$ | = electrical signal from the hot-wire. |
| L | = lenght of the pipe. |
| R | = pipe radius. |
| Re | = Reynolds number. |
| U | = mean velocity |
| u | = fluctuating velocity |
| $U^+ = U/U_\tau$ | |
| $U_\tau = \sqrt{\tau/\rho}$ | = friction velocity |
| x, y, z | = coordinate system. |
| $y^+ = y u_\tau / \nu$ | |
| $y_{m/2}$ | = distance from the jet axis to the radial location where the velocity is half the maximum velocity. |
| $\alpha = R_i / R_o$ | |
| $\nu$ | = kinematic viscosity |
| $\rho$ | = density of the flow |
| $\tau$ | = wall shear stress |

## SUBSCRIPTS

i = inner side.
o = outer side.
m = mean
max = maximum

(*) At the of the revue of the proves of the present paper, investigation performed in the experimental set up described here and pointed out in section 5 has already been, writeten, see references 18, 19 and 20.

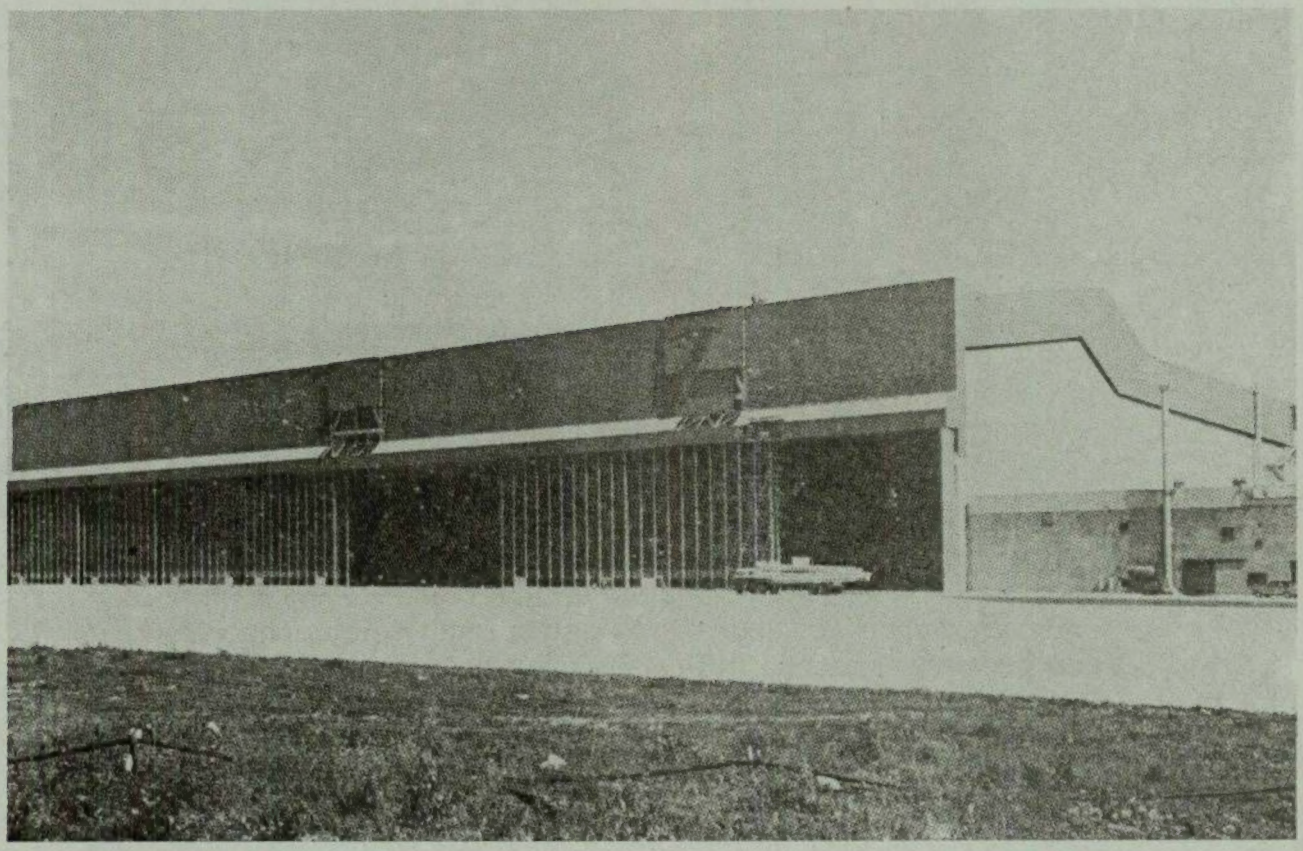
# FEIRAS, CONFERÊNCIAS, EXPOSIÇÕES E CURSOS NO MUNDO

| OBJECTIVO E PROGRAMA | LOCAL, DATAS, ORGANIZAÇÃO INFORMAÇÕES |
|---|---|
| Simpósio Internacional de Lisboa sobre Fluorescência: Microscopia, Medições e Fotoquímica | Lisboa, 24-25 Maio-73<br>Instituto Português de Oncologia |
| FAWEM<br>2.ª Exposição de Maquinaria e Máquinas Ferramentas | Basileia, 25 Maio - 2 Junho 72 |
| 3.º Congresso Mundial «Purificação do Ar» | Düsseldorf, 4 - 8 Junho - 73<br>Câmara de Comércio Luso-Alemã |
| 1973 National Computer Conference & Exposition | New York Coliseum - Junho 4-8<br>AFIPS Headquarters, 210 Summit Avenue, Montvale, New Jersey 07645 - U.S.A. |
| ENVITEC — Exposição Internacional para a Protecção à Natureza e respectiva técnica | Düsseldorf, 4 - 9 Junho - 73 |
| II Colóquio Nacional da Indústria da Construção<br>Tema: O Desafio da Produtividade no IV Plano de Fomento:<br>1. O mercado<br>2. A industrialização e estrutura empresarial<br>3. Aspectos legais e regulamentares | Lisboa, 4 - 9 Junho - 73<br>R. António Enes, 9, 5.º, L. 1 — Tel. 53 31 93 |
| Conferência Norte - Americana de Escavação Rápida e Construção de Túneis<br>(Patrocinado pelo Inst. Am. de Engenheiros de Minas, Metalurgia e Petróleo) | 5 - 7/6/73<br>Inf. Alexandre Scott<br>AIME 345E, 47 th. St. New York Ny<br>USA 10017 |
| XII Congresso Mundial do Gás | Nice, 5 a 9 Junho |
| FIL | Lisboa, 9 - 23 Junho - 73<br>FIL |
| II Simpósio Europeu de Estradas de Betão | Berna 13 - 15 Junho 1973<br>Secrétaire Genéral Second Symposium Européen des Routes en Béton<br>2, rue Saint Charles, 75 Paris 15 |
| V Conferência Mundial sobre Engenharia Sísmica | Roma 24 - 29/Junho 1973<br>Organizada pelo Ministério de Obras Públicas de Itália e a I. A. E. E. |
| International Powder Metallurgy Conference | Montreal, 1 - 6 Junho - 73<br>201 EAST 42nd St. N. Y., N. Y. 10017, U. S. A. |
| International Powder Metallurgy Conference (P/M 73) | Toronto, Canadá, 15 - 20 Julho - 73<br>201 East 42nd Street, New York, N. Y. 10017, U. S. A. |
| VIII Congresso Internacional da Mecânica do Colos e Engenharia de Fundações | Moscovo, 6 a 11 de Agosto de 1973 |
| Exposition de Radio et Têlevision | Berlin, 31 Agosto - 9 Setembro - 73 |
| 1.ª Feira Internacional de Calçado | Londres, Setembro - 73<br>F. F. Exportação |
| FILMODA | Lisboa, 15 - 19 Setembro - 73<br>FIL |

# CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, S.A.R.L.

PRAÇA DO MUNICÍPIO, 13 - 3.º TELEF. 36 65 06 · LISBOA 2
DELEGAÇÕES: CABO-VERDE · ANGOLA · MOÇAMBIQUE

## TAP-TRANSPORTES AÉREOS PORTUGUESES



**CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, S. A. R. L.** — Empreiteiro geral do Hangar n.º 6 para «BOEINGS» — 747 — (Jactos para 370 passageiros).

**OBRAS PÚBLICAS**
**CONSTRUÇÃO CIVIL—INDUSTRIAL E URBANA**

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA • FUNDAÇÕES ESPECIAIS • CONSOLIDAÇÕES
OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS • PONTES E VIADUTOS • SILOS E CHAMINÉS
INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

NOS
LABORATÓRIOS
SUBTERRÂNEOS DA
SKF UM CIENTISTA OCU-
POU-SE DURANTE ANOS A APER-
FEIÇOAR A MÁQUINA DESTINADA A RE-
VOLUCIONAR OS FUNDAMENTOS DA TECNOLOGIA
DOS ROLAMENTOS.

Se não parecemos preocupados, devíamos parecer. Este aparelho vai causar grande agitação entre aqueles que lidam com rolamentos e são muitas mais pessoas do que as que podemos imaginar. Este é o primeiro sistema que permite o controle do estado dum rolamento e que pode prever com certa antecedência uma futura avaria. Em primeiro lugar, vai ajudar o utilizador dos rolamentos, pois irá indicar quando e porque se devem substituir. Vai ajudar, também, os nossos concorrentes, pois os seus clientes podem avisá-los com uma certa antecedência de que vão ter que substituir um rolamento. Enfim, a manutenção preventiva atingiu uma nova era.

Se quer saber mais pormenores, informe-se na

**SKF**

LISBOA
PRAÇA DA ALEGRIA, 66-A TELEF.: 362301 TELEGR.: ESKAEF

PORTO
RUA DELFIM FERREIRA, 604 TELEF.: 892054 TELEGR.: ESKAEF

C. D. U. 621.039.5

# DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO REACTOR PORTUGUÊS DE INVESTIGAÇÃO À POTÊNCIA ZERO

JAIME M. COSTA OLIVEIRA
CARLOS A. MORAIS DA VEIGA
Laboratório de Física e Engenharia Nucleares

RESUMO

*Mediu-se a função de transferência do Reactor Português de Investigação (RPI), a baixa potência, pelo método de modulação da reactividade, na banda de frequências compreendida entre $5.10^{-3}$ Hz e 65 Hz. Descrevem-se as características dos dispositivos experimentais e da técnica de medição utilizados, bem como o princípio do tratamento numérico dos dados experimentais.*

*O modulador concebido para esta experiência possuía boas características de estabilidade para as frequências estudadas e a técnica adoptada na detecção e análise da resposta do reactor revelou-se muito eficaz. Os resultados obtidos são comparados com os fornecidos pela teoria cinética pontual, constatando-se a influência dos harmónicos espaciais no comportamento dinâmico do reactor, a qual não é tida em conta pelo modelo pontual. Dos valores da função de transferência deduz-se para o tempo de geração dos neutrões instantâneos no RPI o valor $\Lambda = (56 \pm 2).10^{-6}$ s para uma fracção efectiva dos neutrões retardados $\beta_e = (760 \pm 23).10^{-5}$.*

ABSTRACT

*The zero power transfer function of the Portuguese Research Reactor (RPI) was measured using the reactivity oscillation technique over the frequency range of $5.10^{-3}$ Hz to 65 Hz. The experimental set-up and measurement technique used are described, as well as the numerical handling of the data.*

*The reactivity oscillator designed for the present experiment had good stability at the frequencies studied and the technique used in the detection and analysis of the reactor output proved to be very efficient. The results obtained are compared to the point-reactor kinetics model and the effect of the space harmonics on reactor dynamics is observed. From the measured transfer function a prompt neutron generation time of $\Lambda = (56 \pm 2).10^{-6}$ sec is obtained with an effective delayed neutron fraction $\beta_e = (760 \pm 23).10^{-5}$.*

## INTRODUÇÃO

O comportamento dinâmico de um reactor nuclear pode ser descrito pela sua função de transferência [1, 2, 3], ou seja, pela resposta a pequenas variações sinusoidais de reactividade. A baixa potência, quando o combustível e o fluido de arrefecimento não sofrem um aquecimento sensível, a função de transferência é determinada pelas características da emissão dos neutrões retardados e pelo tempo de geração dos neutrões instantâneos.

O método de modulação de reactividade é um processo clássico [1, 3, 7] de determinação experimental da resposta do reactor (amplitude e fase), frequência por frequência. A excitação periódica é provocada por um modulador que, no caso presente, foi concebido por forma a poder ocupar a posição de um elemento de combustível do RPI [4].

Neste trabalho são apresentadas as características dos dispositivos experimentais e do método de medição que foram utilizados na análise da função de transferência do RPI a baixa potência, na banda de frequências compreendida entre $5.10^{-3}$ Hz e 65 Hz. São também indicados o princípio do tratamento numérico dos dados experimentais e as correcções que é necessário introduzir.

Os resultados obtidos são comparados com a teoria cinética pontual.

Artigo recebido em 11-4-1972

## 1 — *PRINCIPIO*

A análise rigorosa do comportamento dinâmico de um reactor exige a consideração da geometria e do espectro de neutrões característicos do sistema. É, todavia, usual adoptar-se uma aproximação independente do espaço e a um grupo de energias em que se admite que:

- O fluxo de neutrões é uma função exclusiva do tempo.
- A distribuição espacial e energética do fluxo não é modificada (coincide sempre com o modo fundamental).

Em geral, este modelo pontual é válido no caso de variações de reactividade que se distribuem uniformemente no volume do núcleo ou no caso de variações localizadas de reactividade cuja resposta é observada a alguma distância (vários livres percursos médios de transporte) do local de excitação.

As equações da cinética tomam então a seguinte forma (para não sobrecarregar o texto, o significado dos símbolos é indicado no fim):

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta_e}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \gamma_i C_i(t) \qquad (1.1)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \qquad (1.2)$$

Nestas equações faz-se figurar o tempo de geração $\Lambda$ (e não o tempo de vida l) como invariante, o que é recomendável quando se examinam variações da secção eficaz macroscópica de absorção dos neutrões.

Pretende-se analisar a resposta do reactor, inicialmente crítico ( $\rho_o = 0$), a oscilações de reactividade de *fraca* amplitude (aproximação linear):

$$\rho(t) = \rho_o + \Delta\rho(t) \qquad (1.3)$$

Seguindo o método clássico de resolução, obtém-se a função de transferência do reactor a baixa potência [3,6]:

$$H(j\omega) = \frac{N(j\omega)/n_o}{R(j\omega)} = \left\{ j\omega \left[ \Lambda + \sum_i \frac{\gamma_i \beta_i}{j\omega + \lambda_i} \right] \right\}^{-1} \qquad (1.4)$$

$H(j\omega)$ é uma função complexa cuja amplitude e fase são as da função de transferência do reactor.

Em particular, se a variação de reactividade for sinusoidal

$$\Delta\rho(t) = \rho_1 \operatorname{sen}(\omega t), \qquad (1.5)$$

obtém-se, por inversão de (1.4):

$$\frac{\Delta n(t)/n_o}{\rho_1} = |H(j\omega)| \operatorname{sen}[\omega t + \Phi(\omega)]. \qquad (1.6)$$

Na prática, a variação de reactividade é normalmente uma soma de harmónicos de período fundamental T:

$$\Delta\rho(t) = \rho(t) - \rho_o = \sum_{h=1}^{n} \hat{\rho}_h e^{jh\omega t} \qquad (1.7)$$

A função de transferência deduzida directamente a partir das equações da cinética toma a forma [9]:

$$\hat{n}_h = \hat{H}_h \left[ \hat{\rho}_1 \cdot \hat{n}_{h-1} + \hat{\rho}_2 \cdot \hat{n}_{h-2} + \ldots + \hat{\rho}_h \cdot n_o \right] \qquad (1.8)$$

com

$$\hat{H}_h = H(jh\omega) = \left\{ jh\omega \left[ \Lambda + \sum_i \frac{\gamma_i \beta_i}{jh\omega + \lambda_i} \right] \right\}^{-1} \qquad (1.9)$$

Para o fundamental (h = 1) tem-se:

$$\hat{n}_1 = \hat{H}_1 \hat{\rho}_1 n_o = n_1 e^{j\varphi_1} \qquad (1.10)$$

ou seja

$$\hat{\rho}_1 = \rho_1 e^{j\varphi_1} = \frac{\hat{n}_1/n_o}{\hat{H}_1} = \frac{n_1/n_o}{H_1} e^{j(\varphi_1 - \Phi_1)}, \qquad (1.11)$$

$$H_1 = \frac{n_1/n_o}{\rho_1} \qquad (1.12)$$

e

$$\Phi_1 = \varphi_1 - \psi_1 \qquad (1.13)$$

Portanto, para obter $H_1$ é preciso conhecer $\rho_1$ ; caso contrário, apenas se disporá do valor relativo. Já a fase $\Phi_1$ pode ser determinada em valor absoluto.

## 2 — *EQUIPAMENTO*

### 2.1 — *Modulação da reactividade*

O reactor é excitado quase sinusoidalmente por meio de um modulador rotativo com quadrantes de cádmio constituído por um rotor cilíndrico que se move no interior de um tubo em alumínio (stator). O conjunto pode ocupar a posição de um elemento de combustível na grelha do núcleo do RPI (fig. 1), sendo o rotor posto em movimento sob a acção de um motor eléctrico, com a potência de 1,5 HP a 1420 rpm, alimentado com corrente trifásica. O motor e o dispositivo de transmissão do movimento estão apoiados numa plataforma situada na ponte do reactor a 9,8 m da grelha. Um variador de velocidade acoplado ao motor permite cobrir uma gama contínua de 0 a 1420 rpm, em ambos os sentidos.

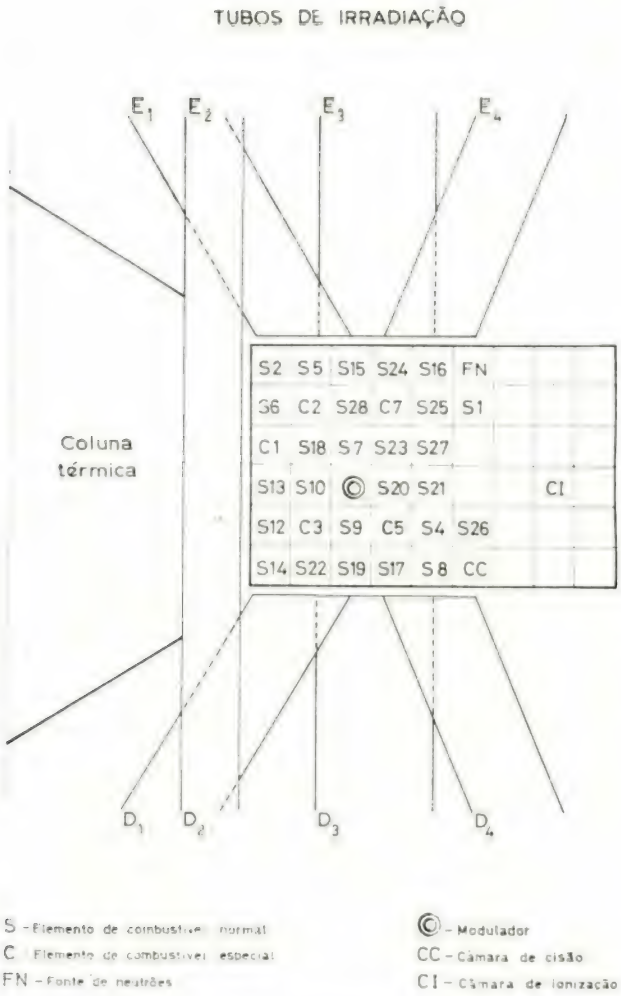



Fig. 1 — Configuração do núcleo do R.P.I. (14-1)

Sobre o stator e o rotor, a meia altura do núcleo, estavam montados rectângulos de cádmio com dimensões ajustadas às condições experimentais. Assim, para provocar quatro períodos de excitação por período do movimento, instalavam-se no rotor quatro rectângulos de cádmio com altura $h = 25$ mm e base $b = p/8$ ($p$ = perímetro do rotor); no stator fixavam-se também quatro rectângulos com $h' = h + 2$ e $b' = p'/8$ ($p'$ = perímetro do stator). Para provocar dois períodos de excitação, montavam-se dois rectângulos com $h = 15$ mm e $b = p/4$ no rotor e outros dois com $h' = h + 2$ e $b' = p'/4$ no stator. Para provocar um período de excitação por período do movimento: um rectângulo com $h = 13$ mm e $b = p/2$ no rotor e outro com $h' = h + 2$ e $b' = p'/2$ no stator.

As gamas de frequência estudadas foram as seguintes:

- Com 4 períodos de excitação/volta: 3 a 65 Hz.
- Com 2 períodos de excitação/volta: 1a 33 Hz.
- Com 1 período de excitação/volta: 0,5 a 16,5 Hz.

Os valores indicados dizem respeito às experiências efectuadas com o motor ligado directamente ao veio do rotor. Para os estudos a frequências mais baixas, dispunha-se de um sistema de desmultiplicação com «duas velocidades» que permitia cobrir uma gama de frequência entre $5.10^{-3}$ e 2Hz (com um período de excitação/volta).

### 2.2 — *Medição do período da modulação*

A medição do período da modulação faz-se através da contagem dos impulsos fornecidos por um gerador funcionando a uma frequência fixa e conhecida (1 kHz). O acesso ao contador é condicionado pelo estado de uma porta que permanece aberta durante um número inteiro de períodos de rotação previamente fixado. O funcionamento desta porta é comandado por impulsos que são fornecidos por uma foto-resistência de cada vez que esta deixa de ser iluminada devido à passagem de um obturador solidário com o eixo do modulador.

Um ensaio da estabilidade do movimento do modulador, feito com o auxílio deste sistema de medição do período, permitiu concluir que as variações de velocidade de um ciclo para outro eram desprezáveis.

### 2.3 — *Detecção e registo da modulação neutrónica*

A detecção da modulação neutrónica é feita por meio de uma câmara de ionização não compensada do tipo Westinghouse WL 6937.

A corrente fornecida pela câmara dá entrada num amplificador corrente-tensão funcionando como adaptador (fig. 2), à saída do qual se procede à compensação

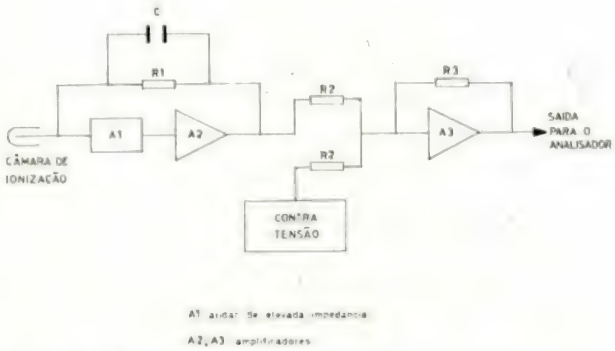



Fig. 2 — Esquema do canal de detecção de neutrões

quase total da componente contínua do sinal por meio de uma contra-tensão apropriada. O sinal é então amplificado e digitalizado por intermédio de um conversor tensão-amplitude (o conversor de um selector de amplitudes de 400 canais, Intertechnique SA 40 B).

O registo da modulação é feito através de uma montagem electrónica, esquematizada na fig. 3, que permite:

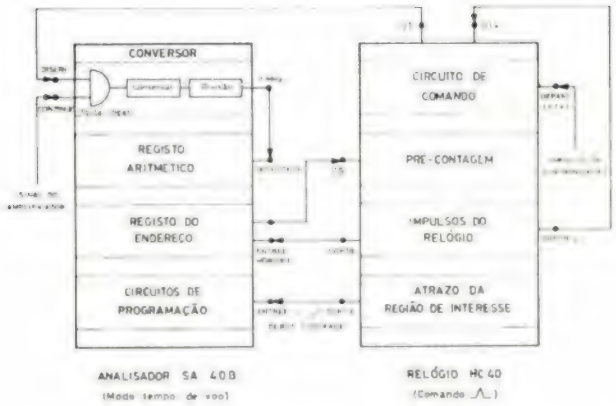



Fig. 3 — Esquema do equipamento de registo da modulação neutrónica

— efectuar uma amostragem instantânea do sinal com um período de amostragem escolhido:

$$(1\text{-}2\text{-}4\text{-}8) \times (10^{-5} - 10^{-4} - 10^{-3} - 10^{-2} - 10^{-1} - 10^{0} - 10^{1} - 10^{2})\ \text{s};$$

— armazenar as sucessivas amostras nos 400 canais da memória do selector (os impulsos do relógio que determinam os instantes da amostragem comandam também o avanço do endereço dos canais);

— repetir a análise o número desejado de vezes, somando as informações provenientes de cada uma, nos canais correspondentes (para tanto, o início de cada período de análise é comandado por um impulso de sincronização fornecido por um dispositivo de referenciação solidário com o eixo do modulador).

Este método de registo permite melhorar a precisão dos resultados, o que é particularmente relevante atendendo a que a amplitude da modulação é fraca.

## 3 — *REALIZAÇÃO EXPERIMENTAL*

### 3.1 — *Configuração*

O estudo da função de transferência do RPI incidiu sobre a configuração representada na fig. 1.

O núcleo do reactor é constituído por elementos de combustível do tipo MTR, com 12 placas curvas de espessura igual a 1,78 mm (0,070"), formadas por uma liga de urânio e alumínio (45% de urânio, em peso) e com bainhas de alumínio. O urâneo é enriquecido a 20% no isótopo 235.

O reactor pode funcionar com o núcleo imerso em qualquer das duas secções da piscina mas é mais frequente utilizar a menor porque nela estão situados todos os dispositivos de irradiação (designadamente, os tubos de irradiação e a coluna térmica). Nesta secção, onde foi feito o estudo, uma das faces do núcleo contacta com a coluna térmica.

O modulador ocupava uma posição quase central e o detector de neutrões estava instalado sobre a grelha (fig. 1).

### 3.2 — *Medição*

A determinação da função de transferência por modulação da reactividade implica:

*a*) A estabilização do reactor com o modulador a rodar a uma dada velocidade.

*b*) O registo da modulação neutrónica logo que o regime de equilíbrio se estabelece. A memória do selector de amplitudes contém, ao fim de R períodos de análise, uma imagem discreta da resposta do reactor à excitação introduzida (o canal i registará uma contagem $n_{ri}$ que é a soma das amostras correspondentes obtidas em cada um dos períodos). Esta imagem é perfurada numa fita de papel por intermédio de um «chassis» de comando Intertechnique BK 21 e de uma perfuradora Tally 420.

*c*) A medição do período do movimento (§ 2.2).

*d*) A introdução dos valores experimentais num programa de cálculo que fornece, para cada frequência estudada, a amplitude relativa e a fase da função de transferência do reactor.

As medidas foram feitas em vários dias a potências da ordem de 50 W.

## 4 — *TRATAMENTO DOS DADOS*

### 4.1 — *Análise de Fourier da resposta do reactor*

A imagem da modulação neutrónica é uma tensão v (t) que se apresenta sob a forma de uma sucessão de amostras $v(t_i)$ colhidas em instantes separados por intervalos de tempo iguais. Como resultado desta amostragem instantânea aplicada à função contínua v (t), obtém-se, em teoria, uma nova função [10]:

$$v^{+}(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \Delta t\ v(i\Delta t)\ \delta(t - i\Delta t) =$$

$$= \Delta t\ v(t) \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - i\Delta t) = v(t)\ d_{\infty}(t) \qquad (4.1)$$

com

$$d_{\infty}(t) = \Delta t \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - i\Delta t). \qquad (4.2)$$

As amostras $v(i\Delta t)$ são taxas de contagem «instantâneas», isto é taxas de contagem medidas em intervalos de tempo muito curtos comparados com $\Delta t$. Isto signi-

fica que se dispõe de valores de v (i $\Delta$ t) multiplicados por um factor de escala e que a introdução do factor $\Delta$ t na expressão (4.1) só se justifica por uma questão de comodidade.

A transformada de Fourier de $v^+$ (t) vem dada por

$$V^+(f) = F\left\{v^+(t)\right\} = V(f) * D_\infty(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} V(f) * \delta(f - \frac{i}{\Delta t})$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} V(f - \frac{i}{\Delta t}) = V(f) + \sum_{1}^{+\infty}\left[V(f - \frac{i}{\Delta t}) + V(f + \frac{i}{\Delta t})\right]. \tag{4.3}$$

Se o fenómeno estudado não apresentar (ou for desprezável para) frequências superiores a uma frequência máxima $f_M$ e se o período de amostragem for escolhido de maneira que

$$f_a > 2\, f_M \quad \text{ou seja} \quad F_N = (2\Delta t)^{-1} > f_M, \tag{4.4}$$

tem-se:

$$V^+(f) = V(f)$$

No caso presente, o sinal é periódico e a sua decomposição em série de Fourier fornece o seguinte resultado:

$$v(t) = \sum_h |A_h|\, e^{j\varphi_h}\, e^{j2\pi ht/T} \tag{4.5}$$

cuja transformada de Fourier é:

$$V(f) = \sum_h |A_h|\, e^{j\varphi_h}\, \delta(f - \frac{h}{T}) \,. \tag{4.6}$$

Por conseguinte, tendo em conta (4.4), pode escrever-se:

$$A_h^+(f) = A_h(f) \tag{4.7}$$

Por outro lado, se as frequências dos harmónicos de v(t) são inferiores a $(2\,\Delta\,t)^{-1}$, não se observa qualquer efeito de dobragem e obtém-se a fase da função de transferência também sem qualquer correcção.

Basicamente, o princípio do tratamento dos dados relativos à modulação neutrónica consiste em efectuar uma decomposição em série de Fourier da porção de cada registo correspondente ao período de excitação previamente determinado (§ 2.2).

O conteúdo de cada canal da memória do selector, ao fim de R períodos de análise (fig. 4), é

$$n_r(t_i) = n_{ri} = \sum_{j=1}^{R}\left\{n\left(t_i + (j-1)\,T_A\right)\right\} \,. \tag{4.8}$$

Calcula-se o maior inteiro contido em T/ $\Delta$ t (seja N) e efctua-se a decomposição de Fourier sobre as N amostras:

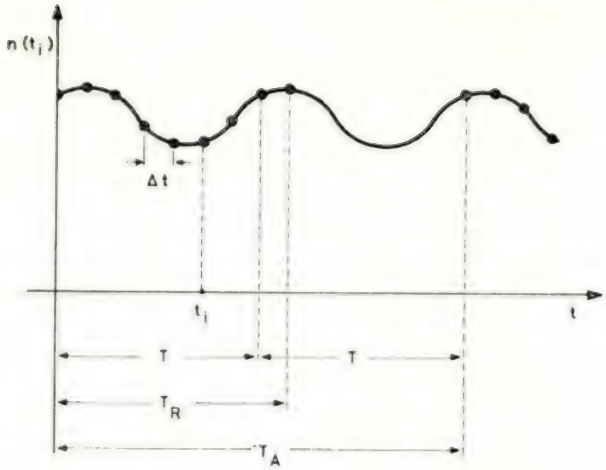



Fig. 4 — Amostragem do sinal

$$C_h + j\,S_h = \frac{2}{RT}\sum_{i=1}^{N} n_{ri}\, e^{jh\omega t_i} = \frac{2}{RT}\sum n_{ri}\, e^{j2\pi hi\Delta t/T} \tag{4.9}$$

A amplitude do harmónico é dada por

$$A_h = \left[(C_h)^2 + (S_h)^2\right]^{1/2} \tag{4.10}$$

e o seu argumento por

$$\varphi_h = \text{arc tg}\, S_h / C_h \tag{4.11}$$

Note-se que $\varphi_h$ é a fase da resposta do reactor em relação à referência imposta pelo impulso de disparo dos ciclos de análise (§ 2.3).

O nível médio do sinal vem dado por:

$$v_o = V_o K + \frac{\sum_1^N n_{ri}}{N} \tag{4.12}$$

e permite calcular a amplitude relativa do harmónico h:

$$a_h = A_h / v_o \tag{4.13}$$

Um programa escrito em linguagem Fortran para um computador PDP 15/20 permite calcular $I_h$, $C_h$, $S_h$, $A_h$, $\varphi_h$ e $a_h$ para os três primeiros harmónicos, a partir dos valores de T, R, $V_o$, K e $n_{ri}$.

### 4.2 — *Determinação da função de transferência*

Para determinar a função de transferência de um reactor não é imprescindível excitá-lo de uma maneira rigorosamente sinusoidal, o que, de resto, é praticamente impossível. Basta introduzir uma excitação periódica (de *fraca amplitude)* que pode ser considerada como uma soma de sinusoides puras, cada uma das quais contribui para a resposta do reactor. As componentes fundamentais obtidas por análise de Fourier da resposta e da excitação permitem calcular a função de transferência.

Acontece porém que não é muito importante determinar o ganho da função de transferência em valor absoluto, o que permite passar sem o conhecimento da forma exacta da excitação (apenas há que garantir que a amplitude é fraca). Nestas condições, basta considerar, para cada frequência, o fundamental da decomposição da resposta; concretamente os valores de $a_h$ e $\varphi_h$ para $h = 1$.

Para obter os valores absolutos da fase da função de transferência do reactor, importa ainda determinar a diferença de fase entre a referência que marca o início dos ciclos de análise e a excitação. Para isso, faz-se rodar o modulador nos dois sentidos, à mema frequência: a semi-diferença dos valores de $\varphi_1$ assim medidos permite calcular esta diferença de fase; por seu turno, a semi-soma daqueles ângulos fornece directamente a fase da função de transferência correspondente à frequência estudada.

A partir da curva experimental da amplitude relativa da função de transferência, medida com o reactor crítico, é possível determinar a frequência de corte, $f_c$, e a partir desta o valor de $\alpha_c$:

$$\alpha_c = \frac{\beta_e}{A} = 2\pi f_c \ .$$

Também é possível representar os valores de $t_g \Phi$ em função de $\omega \gg \lambda_M$ ($\lambda_M$ é o maior $\lambda_i$): obtém-se uma recta cuja inclinação é $\alpha_c^{-1}$

### 4.3 — *Correcções*

#### 4.3.1 — *Influência da banda passante do amplificador*

O amplificador associado ao detector de neutrões pode deformar os sinais em amplitude e em fase. Sendo $F_c$ a frequência de corte do amplificador, há pois que efectuar, em princípio, as seguintes correcções:

Sobre a fase: $\varphi_v = \varphi_m + \text{a c tg}(f/F_c)$

Sobre a amplitude: $A_v = A_m \left[ 1 + (f/F_c)^2 \right]^{1/2}$

(*v* e *m* significam respectivamente verdadeiro e medido).

Note-se que, para $f = F_c / 10$, a diferença de fase introduzida pelo amplificador é ainda de $-6°$ enquanto que a razão entre as amplitudes é praticamente igual a 1.

No presente trabalho tem-se $F_c = 1{,}6$ kHz pelo que aquelas correcções são praticamente desprezáveis.

#### 4.3.2 — *Influência do tipo de registo*

Como se viu no § 4.1, a amostragem instantânea à qual é submetido o sinal v(t) não provoca qualquer deformação na fase e amplitude respectivas, desde que o espectro do sinal possa ser considerado limitado e desde que se escolha uma frequência de amostragem tal que $f_N > f_M$.

No caso presente, tem-se sempre

$$200\ \Delta t < T < 400\ \Delta t \ ,$$

ou seja $$\frac{200}{T} > f_N > \frac{100}{T} \ .$$

Por conseguinte, a frequência de amostragem é sempre nitidamente superior à frequência dos harmónicos do sinal, os quais, de resto, são praticamente desprezáveis a partir da 3.ª ordem (numa decomposição típica correspondente a uma frequência do fundamental igual a 0,035 Hz, a amplitude do harmónico 2 vale 3,2% da amplitude do fundamental, ao passo que a amplitude do harmónico 3 só representa 0,9%).

Nestas circunstâncias, os valores da amplitude e da fase do fundamental de v(t) não foram sujeitos a qualquer correcção proveniente do tipo de registo.

## 5 — *PRECISÃO*

### 5.1 — *Generalidades*

As contagens $n_{ri}$ revelam flutuações devidas à natureza estatística

- das reacções nucleares que ocorrem no reactor,
- dos fenómenos ligados à detecção dos neutrões,
- do ruído electrónico do canal de detecção,
- da conversão analógico — digital,
- da reprodutibilidade das condições de amostragem.

Admitindo que as quantidades $n_{ri}$ são variáveis gaussianas, as distribuições de probabilidade de $C_h$ e $S_h$ são também gaussianas, dado que estes termos do desenvolvimento de v(t) são obtidos através de uma série de operações lineares que incidem sobre os valores de $n_{ri}$ Nesta hipótese, os desvios-padrão de $C_h$ e $S_h$ — $\sigma_C$ e $\sigma_S$ — podem ser considerados como as incertezas que afectam o valores respectivos.

Além de estimar a precisão com que os resultados de uma experiência representam as esperanças matemáticas de $C_h$ e $S_h$, importa determinar os erros devidos ao tipo de análise a que é submetido o sinal.

### 5.2 — *Erros devidos às flutuações neutrónicas*

Pretende-se determinar a precisão das medidas da amplitude e do argumento do fundamental de v(t), examinando-se a influência das flutuações estatísticas do sinal nas seguintes condições:

— ausência de modulação;
— análise contínua (a decomposição de Fourier incide sobre um sinal ainda não submetido a qualquer amostragem).

De acordo com exposto na ref. [9], conclui-se que:

*a*) As medidas C e S representam as respectivas esperanças matemáticas a mais ou menos $2\sigma_C = 2\sigma_S$ com uma probabilidade de 95%.

*b*) O desvio-padrão da medida da amplitude do fundamental vem dado por:

$$\sigma_A = \sigma_C = \sigma_S = \left[\frac{2\,P(1\,T)}{RT}\right]^{1/2} . \qquad (5.1)$$

*c*) O desvio-padrão da medida do argumento do fundamental é

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_A}{A} . \qquad (5.2)$$

*d*) A razão sinal/ruído, na hipótese de se desprezar o ruído da aparelhagem (o que no caso presente se revelou perfeitamente razoável excepto para f = 50 Hz), pode exprimir-se sob a forma

$$\frac{S}{R} = \frac{A}{\sigma_A} = \Delta\varphi\,|H(f)|\sqrt{\frac{RT\varepsilon F}{2(1+\varepsilon\chi\,|H(f)|^2)}} . \qquad (5.3.)$$

Facilmente se conclui que para melhorar esta razão há interesse em utilizar um detector com a maior eficiência possível e em aumentar o tempo de registo e/ou a potência do reactor (sobretudo quando a eficiência é pequena e se trabalha a frequências elevadas pois, então para registos de duração igual, S/R diminui de 6 dB/oitava na banda de frequências em que H(f) varia desta maneira).

### 5.3 — *Erros devidos ao tipo de análise*

No § 5.2, examinou-se a influência das flutuações estatísticas do sinal sobre a precisão dos valores medidos, supondo que a análise era de tipo contínuo. Na realidade, o sinal v(t) que sai do amplificador corrente-tensão é submetido a uma amostragem periódica, sendo cada amostra o resultado de uma conversão analógico-digital. Finalmente a decomposição de Fourier vai incidir sobre a representação discreta de v(t) assim obtida. Importa, por conseguinte, analisar as implicações deste tipo de análise na precisão dos resultados.

*a*) *Conversão analógico-digital*

A conversão analógico-digital acarreta uma quantificação do sinal: os valores contínuos de v(t) vêm representados por valores discretos $n(t_i)$. O conversor impõe um limite superior a $n(t_i)$ que depende, em particular, do coeficiente de conversão escolhido — e cujo inverso é afinal a unidade da escala de medição. O erro relativo introduzido pela quantificação é da ordem desta unidade e no caso presente, é, em geral, inferior a 1%.

*b*) *Condições de amostragem*

As deficiências na reproductibilidade das condições de amostragem podem ser imputadas:
— ao sistema de disparo dos ciclos de análise;
— ao relógio que comanda os instantes de amostragem.

As características de um e de outro permitem todavia desprezar erros provenientes de tais origens. Em particular, verificou-se com um relógio de quartzo que a estabilidade dos valores dos períodos de amostragem era excelente.

Por outro lado, a soma dos $n(t_i)$ correspondentes aos diversos ciclos de análise é perfeita e não impõe restrições.

*c*) *Decomposição de Fourier*

A decomposição de Fourier do sinal incide sobre mais de 200 amostras por período de modulação, admitindo-se que daí não resulta qualquer influência sobre a precisão dos resultados (§ 4.3.2).

### 5.4 — *Cálculo de erros*

A expressão (5.3) permite calcular o erro relativo do valor $A = A_1$, expressão (4.10), da amplitude do fundamental para condições de medição determinadas, isto é, para valores conhecidos de F, $\varepsilon$, $\Delta\varphi$, R e f = 1/T. Recorda-se que se tem $\chi = 0{,}8$,

$$F = 3{,}2 \,.\, 10^{10}\, P \qquad (5.4)$$

e que o número de acontecimentos úteis registados pela câmara pode ser estimado [7] por meio de

$$N_D \approx i\left(\frac{1{,}6 \,.\, 10^{-19}}{2}\,\frac{E_\alpha}{E_i}\,F_B\right)^{-1} = \varepsilon\, F \qquad (5.5)$$

em que $E_\alpha = 1{,}47$ MeV, $E_i = 26$ eV e $F_B = 0{,}6$.

O desvio padrão de A vem então dado por

$$\sigma_A\,(f) = A(f).\,\frac{R}{S}\,(f) . \qquad (5.6)$$

Para obter o desvio padrão da amplitude relativa $a = A/v_o$ há que ter em conta, finalmente, a imprecisão de $v_o$.

O valor de R/S fornece directamente $\sigma_\varphi$ e para determinar o erro da fase $\Phi$ da função de transferência basta introduzir a incerteza relativa à diferença de fase entre a referência que marca o início dos ciclos de análise e a excitação (§ 4.2).

## 6 — *RESULTADOS*

Os valores experimentais da amplitude relativa e da fase do fundamental da resposta do RPI, obtidos a baixa potência na configuração estudada, estão representados nas figs. 5 e 6. Os erros relativos indicados na fig. 5 e as barras de erro representadas na fig. 6 correspondem a $\pm 2\,\sigma_a/a$ e a $\pm 2\,\sigma_\Phi$, respectivamente, e são típicos da gama de frequências em que se situam. A sua determinação foi feita nas condições expostas no capítulo 5 e constata-se que $2\sigma_a/a \leq 0{,}5\%$ e $2\sigma_\Phi < 1{,}0°$ em quase toda a banda de frequência estudada. Verifica-se ainda que, para frequências superiores à frequência de corte do reactor, os erros aumentam à medida que H(f) diminui.

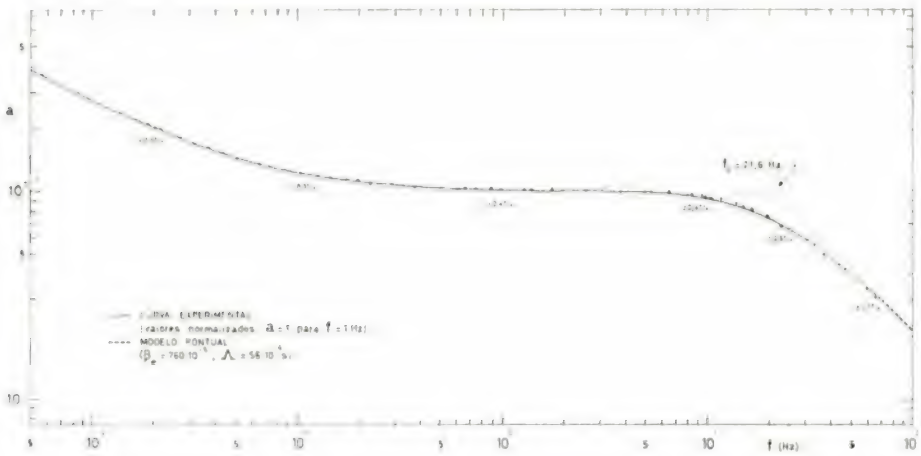



Fig. 5 — Amplitude relativa da função de transferência do RPI à potência zero

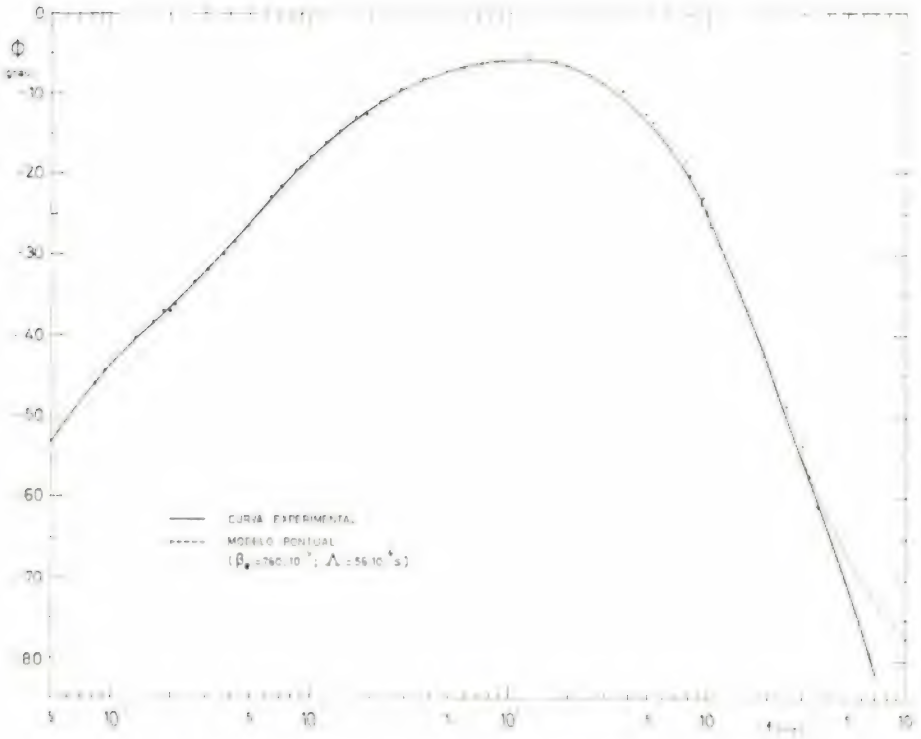



Fig. 6 — Fase da função de transferência do RPI à potência zero

QUADRO I

| Grupo | $T_i$ (s) | $\lambda_i$ ($s^{-1}$) | $\beta_i / \beta$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 54,51 $\pm$ 0,94 | 0,0127 $\pm$ 0,0002 | 0,038 $\pm$ 0,003 |
| 2 | 21,84 $\pm$ 0,54 | 0,0317 $\pm$ 0,0008 | 0,213 $\pm$ 0,005 |
| 3 | 6,00 $\pm$ 0,17 | 0,115 $\pm$ 0,003 | 0,188 $\pm$ 0,016 |
| 4 | 2,23 $\pm$ 0,06 | 0,311 $\pm$ 0,008 | 0,407 $\pm$ 0,007 |
| 5 | 0,496 $\pm$ 0,029 | 1,40 $\pm$ 0,081 | 0,128 $\pm$ 0,008 |
| 6 | 0,179 $\pm$ 0,017 | 3,87 $\pm$ 0,369 | 0,026 $\pm$ 0,003 |

Aos valores experimentais foi ajustada uma curva desenhada a partir dos valores calculados em teoria pontual utilizando os parâmetros característicos da emissão dos neutrões retardados que se encontram coligidos no Quadro I [8].

Da comparação dos valores experimentais com os calculados infere-se que

- o tempo de geração dos neutrões instantâneos corespondente à curva que melhor se ajusta aos resultados experimentais é

$$\Lambda = (56 \pm 2).\ 10^{-6}\ s:$$

$\alpha_c = 135{,}7\ s^{-1}$ ($\pm$ 0,5%) e o valor estimado para $\beta_e$ é $(760 \pm 23).\ 10^{-5}$;

- para frequências superiores à frequência de corte do reactor,

$f_c = 21{,}6$ Hz ($\pm$ 0,5%),

o modelo pontual não é suficiente para representar o comportamento dinâmico de um reactor nuclear pois os efeitos de espaço deixam de ser desprezáveis [9].

Uma experiência efectuada segundo o método Rossi-$\alpha$, numa configuração mais pequena e sem o elemento central retirado (actual posição do modulador), fornecera o resultado [5]: $\Lambda = (48 \pm 4).\ 10^{-6}$ s.

A determinação de $\alpha_c$ pelo método exposto no § 4.2 revela-se delicada devido à presença dos harmónicos espaciais.

## CONCLUSÕES

O método de modulação da reactividade permite determinar o ganho e a fase da função de transferência de um reactor, no ponto em que se efectua a medição. A partir daqueles valores, é possível deduzir o tempo de geração dos neutrões instantâneos desde que se considere conhecida a fracção efectiva dos neutrões retardados $\beta_e$.

Com o modulador concebido para esta experiência foi possível estudar, com uma boa estabilidade, uma banda de frequências compreendida entre $5.10^{-3}$ Hz e 65 Hz. A técnica experimental adoptada para a detecção e análise da resposta do reactor revelou-se muito eficaz. E os resultados obtidos para a função de transferência do RPI, à potência zero, forneceram um valor para $\Lambda = (56 \pm 2).\ 10^{-6}$ s com $\beta_e = (760 \pm 23).10^{-5}$. Constatou-se mais uma vez [9] a influência dos harmónicos espaciais no comportamento dinâmico dos reactores, a qual não é tida em conta pelo modelo pontual usualmente utilizado nos cálculos teóricos.

AGRADECIMENTO: Os autores agradecem ao engenheiro Duarte Forjaz Trigueiros o apoio recebido durante a fase de tratamento dos dados e aos operadores do RPI a colaboração prestada no decurso das experiências.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[ 1 ] — «Proceedings of the Conference on Transfer Function Measurement and Reactor Stability Analysis», Argonne, Illinois, ANL-6205 (1960).

[ 2 ] — M. A. SCHULTZ — «Control of Nuclear Reactors and Power Plants». 2nd edition, McGraw-Hill, New York (1961).

[ 3 ] — J. M. HARRER — «Nuclear Reactor Control Engineering». D. van Nostrand, Princeton, N. J. (1963).

[ 4 ] — A. G. RAMALHO e colab. — «Calibração Inicial do Reactor Nuclear do Laboratório de Física e Engenharia Nucleares». LFEN NI 10 (1963).

[ 5 ] — G. S. BRUNSON, J. M. COSTA OLIVEIRA — «Prompt-neutron Lifetime Measurement with an Improvised Time Analyser in the Reactor Português de Investigação (RPI)». Atomic Energy Review 2, 95 (1964).

[ 6 ] — G. R. KEEPIN — «Physics of Nuclear Kinetics». Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1965).

[ 7 ] — J. C. CARRE, G. LUCENET, F. ROULLIER — «Analyse des Fluctuations mesurées sur la Recopie du Pilote Automatique d'ERMINE». Note Interne SEN/F 67-36 (1967).

[8] — J. M. COSTA OLIVEIRA — «Méthodes Expérimentales de la Cinétique et de la Dynamique des Réacteurs Nucléaires». Note CEA N 1076 (1969).

[9] — J. M. COSTA OLIVEIRA — «Étude Expérimentale de la Cinétique et de la Dynamique d'Assemblages Critiques à Neutrons Thermiques». Tese de Doutoramento (Faculdade de Ciências de Orsay). Doc LFEN 109 (1969).

[10] — J. M. COSTA OLIVEIRA — «Influência do tipo de Amostragem sobre os Resultados obtidos por Correlação». LFEN NI 59 (1970).

## SIGNIFICADO DOS SÍMBOLOS

$A_h$ — amplitude do harmónico *h* do desenvolvimento de $n_{ri}(t)$ em série de Fourier.

$a_h$ — amplitude relativa do harmónico *h*.

$C_i(t)$ — concentração dos precursores de neutrões retardados do grupo *i* no instante *t*.

$C_h$ — termo em coseno correspondente ao harmónico *h* do desenvolvimento de $n_{ri}$ em série de Fourier.

$E_i$ — energia necessária para produzir um par de iões.

$E_\alpha$ — energia de uma partícula $\alpha$ emitida numa câmara de ionização com depósito de boro.

F — número de cisões ocorridas no reactor por unidade de tempo.

$F_\beta$ — fracção média da energia da partícula $\alpha$ que provoca a ionização do gás da câmara.

$F_c$ — frequência de corte do amplificador.

$F\{f(t)\}$ — transformada de Fourier da função f(t).

$f = 1/T$ frequência.

$f_a = (\Delta t)^{-1}$ frequência de amostragem.

$f_c$ — frequência de corte do reactor.

$f_h$ — frequência do harmónico h.

$f_N = (2\Delta t)^{-1}$ frequência de Nyquist.

$f_M$ — frequência máxima do espectro de v(t).

$|H(j\omega)|$ — ganho da função de transferência do reactor.

$H(j\omega)$ — função de transferência do reactor.

$\hat{H}_h = H(jhw) = H_h \cdot \exp(j\Phi_h)$.

i — corrente fornecida pela câmara de ionização.

$j^2 = -1$.

K — coeficiente de conversão do analisador.

$L\{f(t)\}$ — transformada de Laplace da função f(t).

l — vida dos neutrões instantâneos.

m — número de grupos de neutrões retardados.

$N(j\omega) = L\{n(t)\}$

$N = T/\Delta t$.

n(t) — densidade neutrónica no instante t.

$\hat{n}_h = n(jh\omega) = n_h \cdot \exp(j\varphi_h)$.

$n_{ri} = n_r(t_i)$ conteúdo do canal *i* ao fim de *R* períodos de análise.

$n_o$ — densidade neutrónica de equilíbrio.

P(f) — densidade espectral energética de um ruído.

R — número de períodos de análise.

$R(j\omega) = L\{\rho(t)\}$

S/R — razão sinal/ruído.

$S_h$ — termo em seno correspondente ao harmónico *h* do desenvolvimento de $n_{ri}(t)$ em série de Fourier.

T — período fundamental da modulação.

$T_A$ — período de análise.

$T_i$ — semi-vida dos precursores de neutrões retardados do grupo *i*.

$T_R$ — $400\,\Delta t$ duração do registo.

t — tempo.

$t_i$ — instante correspondente ao canal *i*.

$V(f) = F\{v(t)\}$

$V_o$ — contra-tensão.

v(t) — tensão-imagem da modulação neutrónica.

$v^+(t)$ — função obtida por amostragem de v(t).

$\alpha_c = \beta_e / \Lambda$

$\beta_e$ — valor eficaz da fracção total dos neutrões retardados.

$\beta_i$ — fracção dos neutrões retardados do grupo *i*.

$\gamma_i$ — eficiência dos neutrões retardados do grupo *i*.

$\Delta n(t)$ — variação de n(t) de fraca amplitude.

$\Delta\rho(t)$ — variação de $\rho(t)$ de fraca amplitude.

$\Delta t$ — período de amostragem.

$\delta(t)$ — função delta de Dirac.

$\varepsilon$ — eficiência do detector.

$\Lambda$ — tempo de geração dos neutrões instantâneos.

$\lambda_i$ — constante de desintegração dos precursores de neutrões retardados do grupo *i*.

$\nu$ — número de neutrões emitidos por cisão.

$\rho(t)$ — reactividade no instante *t*.

$\hat{\rho}_h = \rho_h \cdot \exp(j\psi_h)$.

$\rho_o$ — reactividade no instante t = 0.

$\sigma_x$ — desvio padrão de x.

$\Phi$ — fase da função de transferência do reactor.

$\Phi_h$ — argumento de $\hat{H}_h$

$\varphi_h$ — argumento de $\hat{n}_h$

$\chi = \langle \nu(\nu-1) \rangle / \langle \nu \rangle^2$

$\psi_h$ — argumento de $\hat{\rho}_h$

$\omega = 2\pi f$ pulsação.

$\langle\ \rangle$ — média de um conjunto.

* — produto de convolução.

C

COBA · CONSULPRESA

INTERNATIONAL CONSULTANTS FOR DAMS,
HYDROELECTRIC UNDERTAKINGS,
POWER, TUNNELS, ROCK MECHANICS,
PUBLIC WORKS AND PLANNING

| LISBOA - 1 | MADRID - 1 | RIO DE JANEIRO - GB |
| --- | --- | --- |
| AV. MARQUES DE TOMAR, 9 | GENERAL MOLA, 33 | R. DOM GERARDO, 46 |

ACOPLA-
MIENTOS,
EMBRAGUES
Y FRENOS

CADENAS Y
RUEDAS PARA
MANIPULACIÓN
MECÁNICA

ENGRANAJES
Y
REDUCTORES

HOLROYD

Crofts

SISTEMAS
DE VARIACIÓN
DE VELOCIDAD

CADENAS DE
TRANSMISIÓN
Y RUEDAS

**Escolhe o redutor*...**

# monte a transmissão completa utilizando

## OS PRODUTOS RENOLD PARA A TRANSMISSÃO DE FORÇA

- REDUTORES SEM FIM–relações desde 5 : 1 até 5000 : 1 distancias entre centros desde $1\frac{1}{8}''$ até 28"
- REDUTORES SEM FIM PARA MONTAGEM NO EIXO
- REDUTORES SEM FIM DE MONTAGEM UNIVERSAL
- REDUTORES E CONJUNTOS MOTOR/REDUTOR 'RITESPEED' até 82 : 1 e 50 HP
- REDUTORES HELICOIDAIS PARA MONTAGEM NO EIXO
- REDUTORES HELICOIDAIS DE REDUÇÃO SIMPLES E DUPLA
- REDUTORES DE ENGRENAGENS ESPIRAL EM ANGULO

* Ou acionamentos a corrente, correntes transportadoras, luvas de acoplamento, embreagens, freios, variadores de rotação etc.

*Informações técnicas sobre a linha completa de produtos RENOLD na:*

RENOLD HOLROYD Crofts CARTER

**HARKER SUMNER & CIA., LDA.**
38 Rua de Ceuta, 48 PORTO
Apartado No. 162. Tél: 27054 (4 linhas)
14 Largo do Corpo Santo, 18 LISBOA-2
Tél: 324823, 35124.

RENOLD

RENOLD LIMITED
SALES DIVISION
MANCHESTER · ENGLAND

C. D. U.539.3:536.24

# SOME SPHERICAL-SIMETRY BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN STEADY--STATE ANISOTHERMAL ELASTIC MEDIUM

LUIS MANUEL BRAGA DA COSTA CAMPOS

RESUMO

*O objectivo deste artigo é estudar uma classe de problemas inter-relacionados, respeitantes à determinação de temperatura, vector de fluxo de calor, vector de deslocamento, tensor de deformação, tensor de tensão e vector de tensão, de um meio linear, homogéneo, isótropo e elástico, em regime permanente, com condução de calor, para 4 geometrias esféricas — esfera oca, camada esférica, esfera maciça e cavidade esférica num meio infinito — , e condições na fronteira especificando a deslocação superficial, a pressão ou a tensão tanjencial, e a temperatura, o fluxo de calor ou condições de convecção.*

*Alguns problemas de simetria esférica às condições na fronteira em regime permanente num meio anisotérmico e elástico.*

SINOPSYS

*The purpose of this article is to study a class of interrelated problems, concerning the determination of the temperature, heat flux vector, displacement vector, strain tensor, stress tensor and stress vector, of a linear, homogeneous, isotropic elastic medium, in steady-state, with heat conduction, for 4 spherical geometries — hollow sphere, spherical layer, solid sphere and spherical cavity in infinite medium — , and a range of boundary conditions, — given surface displacement, pressure or tangential stress, and temperature, heat flux, or convection conditions.*

NOTATION

$E$ = scalar density Young's Modulus
$q$ — scalar Poisson Ratio.
$a$ = scalar density Thermal Expansivity.
$C_p$, $C_v$ = scalar densities Specific Heat at Constant Pressure and Volume.
$k$ = scalar density Thermal Conductivity.
$i, j, m = 1, 2, 3$ = running indices; $\partial_t \equiv \partial/\partial t$
$\partial^i_j$ = Kronecker Delta multiplicity (components are 1 if $i=j$, and O if $i \neq j$).
$D_i$ = Covariant Derivative.
$u^i$ = contravariant vector Displacement Vector.
$S^i_j$ = mixed tensor of order 2 Strain Tensor.
$T^i_j$ = mixed tensor density of order two Stress Tensor.
$T_i$ = covariant vector density Stress Vector.
$T$ = scalar Temperature (scale zero at zero-Stress-Strain).
$J^i$ = contravariant vector density Heat Flux.
$n_i$ = covariant vector Normal to a regular surface.
$r, \theta, \varphi$ = spherical coordinates.
$u$ = radial physical component of displacement vector.
$j$ = radial physical component of theat flux.
$T_r$, $T_\theta$, $T_\varphi$ = spherical physical components of Stress Vector.
$T_{rr}$, $T_{r\theta}$, $T_{r\varphi}$, $T_{\theta\theta}$, $T_{\varphi}$, $T_{\varphi\varphi}$ = spherical physical components of Stress Tensor.
$S_{rr}$, $S_{r\theta}$, $S_{r\varphi}$, $S_{\theta\theta}$, $S_{\theta\varphi}$, $S_{\varphi\varphi}$ = spherical physical components of Strain Tensor.
A, B, C, D = arbitrary constants of integration.
$R$, $R_1$, $R_2$ = boundary surface's radiuses.
$T_o$, $T_1$, $T_2$ = boundary surface's temperatures.
$J_o$, $J_1$, $J_2$ = boundary surface radial physical component of Heat-Flux.
$p$, $p_1$, $p_2$ = boundary surface pressure.
$t$, $t_1$, $t_2$ = boundary surface tangential stress.
$u_o$, $u_1$, $u_2$ = boundary surface radial physical component of displacement.

## I — *THE FOUNDAMENTAL EQUATIONS*

### I.1 — *The foundamental equations in tensor from*

Considering a linear, homogeneous, isotropic, anisothermal elastic medium, in steady state, in the absence of gravitic or eletromagnetic fields, and chemical reaction or phase change, of scalar density Young's

Modulns E, scalar Poisson Ratio q, scalar density Thermal Expansivity a, scalar densities Specific Heats at Constant Pressure and Volume, $C_p$ and $C_v$, and scalar density Thermal Conductivity k, the following basic equations hold:

(I) Relation of the contravariant vector density Heat Flux, $j^i$, to the scalar Temperature, T, — Fourier's Law

$$J^i = -k\ D^i T \tag{1}$$

(II) Defenition of the mixed tensor of order two, Strain Tensor, $S^i_j$, from the contravariant vector Displacement Vector, $u^i$,

$$S^i_j = (1/2)\ (D_j u^i + D^i u_j) \tag{2}$$

(III) Relation between the covariant vector density Stress Vector, $T_i$, and the mixed tensor density of order two Stress Tensor, $T^i_j$, at an infinitesimal regular element of area of covariant vector Normal, $n_i$,

$$T_i = T^j_j\ n_i \tag{3}$$

(IV) Mixed tensor density of order two Stress Tensor, $T^i_j$, as function of the mixed tensor of order two Strain Tensor, $S^i_j$, and the scalar Temperature, — Hooke's Law,

$$T^i_j = (E/(1-q))\ S^i_j + (Eq/((1+q)\ (1-2q))\ S^m_m \delta^i_j + (aE/(3\ (1-2q))T \tag{4}$$

(V) Second-order vector and scalar linear homogeneous differential equations, with constant coeficients, satisfied by the contravariant vector Displacement Vector, $u^i$, and scalar temperature, T — momentum and energy equations

$$((1-2q)/(1+q))\ D_j D^j u^i + (1/(1+q))\ D^i D_j u^j = (2/3)\ a\ D^i T \tag{5}$$

$$C_v\ \partial_t T + ((C_p - C_v(a)\ \partial_t D_i u^i = k\ D_i D^i T \tag{6}$$

I.2 — *Foundamental Equations with Spherical-Simetry*

Assuming spherical-simetry, all components of the displacement vector vanish, except for the radial component that depends only on r; the temperature also depends only on r.

Rewriting the preceeding equations, (1) to (6), in physical components, in spherical coordinates, and using the above stated assumptions, we conclude that:

In a (1) linear, homogeneous, isotropic, anisothermal elastic medium in steady state, in the absence of gravitic or eletromagnetic fields, chemical reaction or phase change, of (2) Young's Modulus E, Poisson Ratio q, Thermal Expansivity a, and Thermal Conductivity k, the following relations hold

(I) Components of the Heat Flux vector

$$J_r\ (r) = J\ (r) = -k\ dT/dr \tag{7}$$

$$J_\theta\ (r) = J_\varphi\ (r) = 0 \tag{8}$$

(II) Components of Strain Tensor as function of Displarcement

$$S_{rr}\ (r) = du/dr \tag{9}$$

$$S_{\theta\theta}\ (r) = S_{\varphi\varphi}\ (r) = u/r \tag{10}$$

$$S_{r\theta}\ (r) = S_{r\varphi}\ (r) = S\ (r) = 0 \tag{11}$$

(III) Relation between Stress Tensor and Vector, for spherical surface element

$$T_r\ (r) = T_{rr}\ (r) \tag{12}$$

$$T_\theta\ (r) = T_{r\theta}\ (r) \tag{13}$$

$$T_\varphi\ (r) = T_{r\varphi}\ (r) \tag{14}$$

(IV) Generalized Hooke's Law

$$T_{rr} = (E(1-q)/((1+q)(1-2q)))\ S_{rr} + (Eq/((1+q)(1-2q)))\ (S_{\theta\theta} + S_{\varphi\varphi}) + (aE/(3(1-2q))T$$

$$T_{\theta\theta} = (E(1-q)/((1+q)(1-2q)))\ S_{\theta\theta} + (Eq/((1+q)(1-2q)))\ (S_{rr} + S_{\varphi\varphi}) + (aE/(3(1-2q))T$$

$$T_{\varphi\varphi} = (E(1-q)/((1+q)(1-2q)))\ S_{\varphi\varphi} + (Eq/((1+q)(1-2q)))\ (S_{rr} + S_{\theta\theta}) + (aE/(3(1-2q))T$$

(15) - (16) - (17)

$$T_{r\theta} = (E/(1+q))\ S_{r\theta} \tag{19}$$

$$T_{r\varphi} = (E/(1+q))\ S_{r\varphi} \tag{18}$$

$$T_{\theta\varphi} = (E/(1+q))\ S_{\theta\varphi} \tag{20}$$

(V) Momentum and Energy Equations

$$(3(1-q)/(1+q))\ d/dr\ (\ (1/r^2)d/dr\ r^2\ u(r)\ ) = a\ dT/dr \tag{21}$$

$$r^2\ d^2T/dr^2 + 2\ r\ dT/dr + 2\ T = 0 \tag{22}$$

II — *GENERAL SOLUTION*

II.1 — *General Integral of (21) - (22)*

We shall now obtain the general integral of the system of two linear homogeneous diferential equations of order 2, dependent variables u and T, independent variable r, formed by the equations of momentum and energy, (21) - (22).

We remark that equation (22), the Equation of Energy, is a linear homogeneous diferential equation of order two, with a single dependent variable T, and is of form known as Euler-type, witch the change of independent variable

$$s = \log r \quad r = e^s \tag{23}$$

reduces to a linear homogeneous diferential equation of order two, with constant coeficients

$$d^2T/ds^2 + dT/ds - 2\ T = 0 \tag{24}$$

whose General Integral can be expressed as a linear combination of two linearly independent Particular Integrals:

$$T(s) = A\ T_1(s) + B\ T_2(s) \tag{25}$$

with A and B two arbitrary constants of integration.

Remarking that equation (24) can be wirjten

$$(\ d/ds\text{-}1)\ (\ d/ds + 2\ )\quad T(s) = 0 \tag{26}$$

two particular solutions are

$$(d/ds\text{-}1)\ T(s) = 0$$

$$(d/ds + 2)\quad T(s) = 0$$

(27) - (28)

to with correspond the two linearly independent Particular Integrals

$$T_1\ (s) = e^s \qquad T_2\ (s) = e^{-2s} \tag{29}$$

Replacing (29) in 25), and using (23), we conclude that the general integral of the equation of energy, (22), j. e., the Temperature, is

$$T(r) = A\ r + B\ r^{-2} \tag{30}$$

jn witch A and B are arbitrary constants of integration.

Replacing (30) in (21), we obtain the second--order linear inhomogeneous diferential equation satisfied by the displacement

$$d/dr\ r^{-2}\ d/dr\ r^2\ u(r) = (a(1 + q)/(3(1 - q))$$
$$(A - 2\ Br^{-3}) \tag{31}$$

or, integrationg once, and introducing the arbitrary constant of integration C

$$d/dr\ r^2\ u(r) = (a(1 + q)/(3(1 - q))$$
$$(Ar^3 + B) + 3\ C\ r^2 \tag{32}$$

or, integrating once more, and introdueing the arbitrary constant of integration D, the expression of the Displacement is

$$u(r) = (a(1 + q)/(3(1 - q))$$
$$(Ar^2/4 + Br^{-1}) + C\ r + D\ r^{-2} \tag{33}$$

II.2 — *General Solution*

Hence, a (1) linear, homogeneous, isotropic, anisothermal elastic medjum, in steady state, in the absence of gravitic or eletromagnetic fields, chemical reaction or phase transition, (2) of Young's Modulus E, Poisson Ratjo q, Thermal Expansivity a, Thermal Conductivity k, (3) with physjcal spherical simetry, satisfies the following equations, in witch A, B, C and D are arbitrary constants of integration, specified by the boundary conditions.

(I) Temperature and Displacement, from (30) and (33)

$$T(r) = A\ r + B\ r^{-2} \tag{34}$$

$$u(r) = (a(1 + q)/(12(1 - q))\ A\ r^2 + C\ r + (a(1 +$$
$$+ q)/(3(1 - q))\ B\ r^{-1} + D\ r^{-2} \tag{35}$$

(II) Heat Flux spherjcal-physical componentes, from (7) - (8) and (30)

$$J(r) = J_r\ (r) = -\ k\ A + 2k\ B\ r^{-3} \tag{36}$$

$$J_\theta\ (r) = J_\varphi\ (r) = 0 \tag{37}$$

(III) Strain Tensor spherjcal-physjcal components, from (9) - (106) - (11) and (35)

$$S_{rr}\ (r) = (a(1 + q)/(6(1 - q))\ A\ r + C - (a(1 +$$
$$+ q)/(3(1 - q))\ B\ r^{-2} - 2\ D\ r^{-3} \tag{38}$$

$$S_{\theta\theta}\ (r) = S_{\varphi\varphi}\ (r) = (a(1 + q)/(2(1 - q))\ A\ r + C +$$
$$(a(1 + q)/(3(1 - q))\ B\ r^{-2} + Dr^{-3}$$

$$S_{r\theta}\ (r) = S_{r\varphi}\ (r) = S_{\theta\varphi}\ (r) = 0 \tag{39) - (40}$$

(IV) Stress Tensor and Vector (for spherical surface elements) spherjcal-physjcal companentes, from (12) to (20) and (38) to (40);

$$T_r\ (r) = T_{rr}(r) = \frac{aE(-q)}{6(1-q)\ (1-2q)}\ Ar + \frac{E}{1-2q}$$
$$C + \frac{2a\ Eq}{3\ (1-9)\ (1-2q)}\ Br^{-2} - \frac{2\ E}{1+q}\ Dr^{-3} \tag{41}$$

$$T_\theta\ (r) = T_{r\theta}\ (r) = T_\varphi\ (r) = T_{r\varphi}\ (r) =$$
$$= \frac{aE\ (5-2q)}{12\ (1-9)\ (1-2q)}\ Ar + \frac{E}{1+q}\ C +$$
$$+ \frac{2\ a\ E}{3(1-2a/5}\ Br^{-2} + \frac{E}{1+q}\ Dr^{-3} \tag{42}$$

$$T_{r\theta}\ (r) = T_{r\varphi}\ (r) = T_{\theta\varphi}\ (r) = 0 \tag{43}$$

II.3 — *Boundary conditions*

The constants of integration A, B, C and D, in Formulae (34) to (43) are determined by the boundary conditions, i. e., specified by the conditions satisfied by the temperature and displacement, at given medium limiting or boundary surfaces.

Whatever the geometric shape of the medium, in order to preserve spherical - simetry, the boundary surfaces must be concentric spherical surfaces. We shall consider 4 geometries:

(I) Hollow Sphere of inner and outer radiuses $R_1$ and $R_2$.

(II) Spherical Layer of radius R and thickness e, $e << R$; equivalent to (i) with

$$R = (R_1 + R_2)/2 \qquad e = R_2 - R_1 \qquad (44)$$

(III) Solid Sphere of radius R. Equivalent to (I) with $R_1 = O$ and $R_2 = R$.

(IV) Spherical Cavity of radius R in infinite medium equivalent to (I) with

$$R = R_1 \qquad R_2 = \infty \qquad (45)$$

To preserve spherical-simetry, the physical variables must be constant at these boundary surfaces. As example of the most common boundary canditions, at one sutch surface, of radius $R_1$, we give the following, we shall use later: for Temperature

(I) Specified Temperature $T_1$ at boundary surface

$$T\ (R_1) = T_1 \qquad (46)$$

(II) Heat Flux $J_1$ through the unit are of boundary surface in unit time, in the direction of the normal

$$J\ (R_1) = J_1 \qquad (47)$$

(III) Convection of heat through the boundary surface, from a fluid at free temperature $T_o$

$$J\ (R_1) = h\ (T(R_1) - T_o) \qquad (48)$$

h being the Surface Thermal Conductivity.
for the Displacement

(I) Displacement u at boundary surface

$$u\ (R_1) = u_1 \qquad (49)$$

(II) Pressure p at boundary surface

$$T_r\ (R_1) = p_1 \qquad (50)$$

(III) Tangential Stress $T_1$ at boundary-surface

$$T\ (R_1) = T\ (R_1) = t_1 \qquad (51)$$

Combining these boundary conditions, we would obtain $3 \times 3 = 9$ distinct sets of boundary conditions for each boundary surface, thus $9 \times 9 = 81$ distinct problems for geometries (I) and (II), hollow sphere and spherical layer, and 9 distinct problems for geometries (III) and (IV), solid sphere and spherical cavity, although we shall only give $3 + 1$ examples of the former and $3 + 3$ examples of thelatter.

III — *SOLID SPHERE*

III.1 — *Problem 1*

We consider a solid sphere of radius R, at pressure p and temperature $T_o$ at its surface.

For all solid sphere problems, since the temperature and displacement must be everywhere finite in the sphere, namely at its center, $r = O$, from (34) and (35) it follows that

$$B = O = D \qquad (52)$$

The boundary conditions for this problem are

$$T_r\ (R) = p \quad T\ (R) = T_o \qquad (53) - (54)$$

witch, replacing (41) and (34), using (52), and solving for A and C, $A = T_o\ /R \quad C = (1\text{-}2q)\ p/E - (3 - q)\ aT_o\ /(6(1 - q))$ (55) - (56)

From (52), (55) and (34), (36) the temperature and non-vanishing component of heat flux are

$$T(r) = T_o\, r/R \quad J(r) = -k\ T_o\ /R \qquad (57) - (58)$$

the former increasing linearly from O at the center of the spere to (54) at its surface, the latter being constant.

From (52) - (55) - (56) and (35), the displacement is

$$u(r) = (\ (1\text{-}2q)p/E - (\ (3 - q)/(6(1 - q))aT_o\ )\ r + ((1 + q)/(3(1 - q))\ (aT_o/R)\ r^2 \qquad (59)$$

varying fromO at the center of the sphere, to

$$u(R) = ((1 - 2q)/E)\ pR - aT_o R/6 \qquad (60)$$

at its surface, through the maximum

$$R_m - ((3 - q)/(4(1 - q)))R - (3(1 - q)\ (1 - 2q)/(2(1 + q)))\ (pR/aET_o) \qquad (61)$$

$$u(R_m) = ((3 - q)\ (1 - 2q)/((8(1 + q)))\ pR/E - ((3 - q)^2/(48(1 - q^2)))\ aT_o R \qquad (62)$$

The non-vanishing components of the strain tensor, are, from (2) - (55) - (56) and (38) - (39 - (40)

$$S_{rr}\ (r) = ((1 + q)/(6(1 - q)))\ aT_o\ r/R + ((1 - 2q)/E)p - ((3 - q)/(6(1 - q)))\ aT_o \qquad (63)$$

$$S_{\theta\theta}(r) = S_{\varphi\varphi}(r) = ((1+q)/(12(1-q)))\, aT_o r/R + ((1-2q)/E)p - ((3-q)/(6(1-q)))\, aT_o$$

The non-vanishing components of the Stress Tensor are, from (52) - (55) - (56) and (41) - (42) - (43)

$$T_{rr}(r) = p + ((3-q)/(6(1-q)\ (1-2q)))\ aET_o\ (r/R - 1) \qquad (65)$$

$$T_{\theta\theta}(r) = T_{\varphi\varphi}(r) = p + (aET_o/(12(1-q)\ (1-2q)))\ ((5-q)r/R + 2q + 6) \qquad (66)$$

The Stress-state at the center of the sphere, is from (65) - (66), spherical

$$T_r(O) = T_\theta(O) = T_\varphi(O) = p - aT_o E((3-q)/((6(1-q)\ (1-2q)) \qquad (67)$$

and the stress-stat at the surface of the sphere is hemisprehical specified by (53) and

$$T_\theta(R) = T_\varphi(R) = p - aET_o/(6(1-q)\ (1-2q)) \qquad (68)$$

III.2 — *Problem 2*

We consider a solider a solid sphere of radius R, with displacement $u_o$ at and heat flux $J_o$ through its surface. The boundary conditions are

$$u(R) = u_o \qquad J(R) = J_o \qquad (69) - (70)$$

Replacing (35) in (69), and (36) in (70), using (52), and solving for A and C, we get

$$A = -J_o/k \qquad C = u_o/R + ((1+q)\ (12(1-q)))\ aJ_o R/k \qquad (71) - (72)$$

The temperature and non-vanishing component of heat flux are, from (52) - (71) and (34) - (36),

$$T(r) = -(J_o/k)\ r \qquad J(r) = J_o \qquad (73) - (74)$$

the former decreasing linearly from zero at the center of the sphere to $-J_o R/k$ at its surface.

From (52) - (71) - (72) and (35), the displacemente is

$$u(r) = u_o\ r/R + ((1+q)/(12(1-q)))\ (aJ_o/k)\ (R-r)r \qquad (75)$$

and varies from O at the center of the sphere, to (69) at its surface, through the maximum

$$R_m = R/2 + (12(1-q)/(1+q))\ (u_o\ k/2aJ_o R) \qquad (76)$$

$$R_m^{-1}\ u(R_m) = u_o/2R + ((1+q)/(12(1-q)))\ (aJ_o R/2k) \qquad (77)$$

From (52) - (71) - (72) and (38) - (39) - (40) the non-vanishing components of the Strain Tensor are

$$S_{rr}(r) = u_o/R + ((1+q)/(12(1-q)))\, aJ_o/k)\ (R-2r) \qquad (78)$$

$$S_{\theta\theta}(r) = S_{\varphi\varphi}(r) = u_o/R + ((1+q)/(12(1-q)))\ (aJ_o/k)\ (R-f) \qquad (79)$$

and from (52) - (71) - (72) and (41) - (42) - (43) the non-vanishing components of the Stress Tensor are

$$T_{rr}(r) = (E/(1-2q))u_o/R + (aEJ_o/k)\ ((1+q)\ R - 2\ (3-q)r)/(12(1-q)\ (1-2q)) \qquad (80)$$

$$T_{\theta\theta}(r) = T_{\varphi\varphi}(r) = (E/(1-2q))u_o/R + aaEJ_o/k)\ ((1+q)\ R - (5-2q)r)/(12(1-q)\ (1-2q))$$

The Stress-state at the center of the sphere is spherical

$$T_r(O) = T_\theta(O) = T_\varphi(O) = (E/(1-2q))u_o/R + ((+q)/(12(1-q)))\ aEJ_o R/k \qquad (82)$$

and at the surface of the sphere is hemi-spherical

$$T_r(R) = (E/(1-q))u_o/R - ((5-fq)/(12(1-q)\ (1-2q)))\ (aEJ_o R/k) \qquad (83)$$

$$T_\theta(R) = T_\varphi(R) = (E/(1-2q))u_o/R - ((4-3q)/(12(1-q)\ (1-2q)))\ aEJ_o R/k \qquad (84)$$

III.3 — *Problem 3*

We consider a solid sphere of radius R, tangential stress to at its surface, and heat convection from a fluid at free temperature $T_o$; the boundary conditions are

$$T_\theta(R) = T_\varphi(R) = t_o \qquad T(R) = T_o \qquad (85) - (86)$$

Replacing (42) in (85) and (34) - (36) in (86), using (82) and solving for A and C, we obtain

$$A = hT_o/(k+hR) \qquad C = ((1-2q)/E)t_o - ((3-q)/(6(1-q)))\ aT_o \qquad (87) - (88)$$

From (87), (82) and (34) the temperature is given by (89), increasing linearly from O at the center of the sphere to (90) at its surface, and from (52), (87) and (36) the non-vanishing component of the heat flux is given by (91)

$$T(r) = (hT_o/(khR))r \qquad T(R) = hT_o R/(k+hR)$$
$$J(r) = -khT./(k+hR) \qquad (89) - (90) - (91)$$

From (52) - (87) - (88) and (35) the displacement is

$$u(r) = ((1+q)\ (12(1-q)))\,(ahT_o/(k+hR))\ r^2 + ((1-2q)/E)t_o\ r - ((5-2q)/12(1-q))\ (ahT_o\ R/(k+hR))\ r \qquad (92)$$

varying from O at the center of the sphere to (93) at its surface

$$u(R) = ((1-2q)/E)t_o\ R - ((3q-4)/(12(1-q))\ (ahT_o\ R^2/(k+hR)) \qquad (93)$$

From (52) - (87) - (88) and (38) - (39) - (40) the non-vanishing components of the Strain tensor are

$$S_{rr}(r) = ((1-2q)/E)t_o + (ahT_o/(12(1-)\ (k+hR)))\ (2(1+q)r - (5-2q)R) \qquad (94)$$

$$S_{\theta\theta}(r) = S\ (r) = ((1-1q)/E)t_o + (ahT_o/((k+hR))(12(1-q)))\,((1+q)r - (5-2q)R) \qquad (95)$$

and using (41) - (42) - (43) the non-vanishing compenents of the Srtess tensor are

$$T_{rr}\ (r) = t + (aEhT_o/(12(k+hR)\ (1-q)\ (1-2q)))\ ((3-q)r - (5-2q)R) \qquad (96)$$

$$T_{\theta\theta}(r) = T_{\varphi\varphi}(r) = t_o + (aEhT_o/(k+hR))\ ((5-2q)/(12(1-q)))\ (R+r) \qquad (97)$$

Therefore, the stress-state at the center of the sphere is pherical

$$T_r\ (O) = T_\theta\ (O) = T_\varphi\ (O) = t_o + ((5-2q)/(12(1-q)\ (1-2q)))\ (ahT_o R/(k+hR)) \qquad (98)$$

and at the surface of the sphere is hemi-epherical

$$T_r(R) = t_o + ((8-3q)/(12(1-q)\ (1-2q)))\ (aEhT_o\ R/(k+hR)) \qquad (99)$$

$$T_\theta\ (R) = T_\varphi\ (R) = t_o - ((5-2q)/(6(1-q)\ (1-2q)))\ (aEhT_o R/(k+hR) \qquad (100)$$

## IV – *HOLLOW SPHERE AND SPHERICAL LAYER*

### IV.1 – *Problem 4*

We consider an hollow sphere of inner and outer radiusec $R_1$ and $R_2$, inner and outer surface pressure and temperature $p_1$, $T_1$ and $p_2$, $T$ respectivelly-The boundary conditions are

$$T_1\ (R_1) = p_1 \qquad T_r\ (R_2) = p_2 \qquad T(R_1) = T_1 \qquad T(R_2) = T_2 \qquad (101) - (102) - (103) - (104)$$

or, replacing (34) in (101) - (102), and (41) in (103) (104), and solving

$$A = T_1/R_1 - (R_2^2/R_1((T_1R_2 - T_2R_1)/(R_2^3 - R_1^3)) \qquad (105)$$

$$B = R_1^2R_2^2(T_1\ R_2^2 - T_2\ R_1)/(R - R_2^3 - R_1^3) \qquad (106)$$

$$C = (1-2q)\ p_1/E - ((1-2q)/E)\ (R_2^3(p_2 - p_1)/ /(R_2^3 - R_1^3)) + (a(3-q)/(6(1-q))).$$

$$(R_2^3((R_1 - R_2)/(R_2^3 - R_1^3)) - R_1)(T_1/R_1 - (T_1R_2 - T_2R_1)/(R_2^3 - R_1^3)) - (2qR_2^2/((3(1-q))) \qquad (107)$$

$$D = ((1+q)/2E)\ (R_1^3R_2^3(p_2 - p_1)/(R_2^3 - R_1^3)) + ((3-q)(1+q)/((12(1-Q)\ (1-2q)))(aR_1^3R_2^3\ (R_1 - R_2)/(R_2^3 - R_1^3))(T_1/R_1 - (R_2^2/R_1)((T_1R_2 - T_2R_1)/(R_2^3 - R_1^3)) + (q(-q)/(3(1-q)(1-2q)))\ (aR_1^3R_2^3(R_2^2 - R_1^2)/(R_2^3 - R_1^3))((T_1R_2 - T_2R_1)/(R_2^3 - R_1^3)) \qquad (108)$$

From (99) - (100) and (364), the temperature is

$$T(r) = T_1r/R_1 + R_2^2(T_1R_2 - T_2R_1/(R_2^3 - R_1^3)\ (R_2^2/r^2 - r/R_1) \qquad (109)$$

and the non-vanishing component of heat flux is, from (99) - (100) - (36)

$$J(r) = kT_1/R_1 - (kR_2^2(T_1R_2 - T_2R_1)/(R_2^3 - R_1^3))(1/R_1 + 2R_2^2/r^3) \qquad (110)$$

assuming the values at the surfaces of the sphere

$$J(R)_1 = -kT_1/R_1 - kR_2^2((T_1R_2 - T_2R_1)/(R_2^3 - R_1^3))(1/R_1 + 2R_2^2/R_1^3) \qquad (111)$$

$$J(R_2) = -kT_1/R_1 - kR_2^2((T_1R_2 - T_2R_1)/(R_2^3 - R_1^3))(1/R_1 + 2/R_2) \qquad (112)$$

We could obtain the displacement vector, and the Strain and Stress tensores replacing (105) - (106) (107) - (108) in (35), (38) - (39) - (40) and (41) - (42) (43); for example, the displacement vector is

$$u(r) = (a(1-q)/(12(1-q)))(T_1/R_1 - (R_2^2/R_1)(T_1R_2 - R_2R_1)/(R_2^3 - R_1^3))\ r^2 + [(1-2q)\ p_1/E - ((1-2q)/E)\ (R_2^3(p_2 - p_1)/(R_2^3 - R_3^1)) + (a(3-q)/(6(1-q)))(R_2^3(R_1 - R)/(R_2^3 - R_1^3) - R_1)\ (T_1/R_1 - (R_2^2/R_1)(T_1R_2 - T_2R_1)/(R_2^3 - R_1^3)) - (2aqR_2^2/(3(1-q)))\ (1 + R_2(R_2^2 - R_1^2)/(R_2^3 - R_1^3))\ ((T_1R_2 - T_2R_1)/(R_2^3 - R_1^3))]\ r + (a(1+q)/(3(1-$$

$$- q)))(R_1^2 R_2^2 (T_1 R_2 - T_2 R_1)/(R_2^3 - R_1^3))\ r^{-1} +$$
$$+ [((+q)/2E)(R_1^2 R_2^2 (p_2 - p_1)/(R_2^3 - R_1^3)) + ((3 -$$
$$- q)/(12(L - q)(1 - 2q)))\ (aR_1^3 R_2^3 (R_2^2 - R_1^2)/(R_2^3 -$$
$$- R_1^3))(T_1/R_1 - (R_2^2\ R_1)(T_1 R_2 - T_2 R_1)/(R_2^3 -$$
$$- R_1^3)) + (aq(1 + q)/(3(1 - q)(1 - 2q)))R_1^3 R_2^3 ((R_2^2 -$$
$$- R_1^2)/(R_2^3 - R_1^3))\ ((T_1 R_2 - T_2 R_1)/(R_2^3 - R_1^3))]r^{-2}$$

and the radial-radial componeut of the Stress tensor

$$T_{rr}(r) = (aE(3 - q)/(6(1 - q)(1 - 2q)))\ (T_1/R_1 -$$
$$- (R_2^2/R_1)(T_1 R_2 - T_2 R_1)/(R_2^3 - R_1^3)\ r + [p_1 -$$
$$- R_2^3 (p_2 - p_1)/(R_2^3 - R_1^3) + (E(3 - q)/(6(1 - q)(1 -$$
$$- 2q)))\ (R_2^3 (R_1 - R_2)/(R_2^3 - R_1^3) - R_1)\ (T_1/R_1 -$$
$$- (R_2^2/R_1)(T_1 R_2 - T_2 R_1)/(R_2^3 - R_1^3)) - (2Eq/(3(1 -$$
$$- q)\ (1 - 2q)))aR_2^2 (1 + R_2 (R_2^2 - R_1^2)/(R_2^3 - R_1^3))$$
$$((T_1 R_2 - T_2 R_1)/(R_2^3 - R_1^3))] + (2aE/(5(1 - 2q)))R_1^2$$
$$R_2^2 (T_1 R_2 - T_2 R_1)/(R_2^3 - R_1^3)\ r^{-2} - [R_1^3 R_2^3 (p_1 -$$
$$- p_2)/(R_2^3 - R_1^3) + (E(3 - q)/(6(1 - q)(1 - 2q)))$$
$$(aR_1^3 R_2^3 (R_1 - R_2)/(R_2^3 - R_1^3)(T_1/R_1 - (R_2^2/R_1)$$
$$(T_1 R_2 - T_2 R_1)/(R_2^3 - R_1^3)) + (2aqE/(3(1 - q)\ (1$$
$$- 2q)))(R_1^3 R_2^3 (R_2^2 - R_1^2)/(R_2^3 - R_1^3))\ ((T_1 R_2 -$$
$$- T_2 R_1)/(R_2^3 - R_1^3))]\ r^{-3}$$

IV.2 – *PROBLEM 5*

We consider an hollow sphere of inner and outer radiuses $R_1$ and $R_2$, pressuro and temperature $p_1$ and $T_1$ at the inner surface, and displacement $u_2$ and heat flux $J_2$ at the outer surface. Hence, the boundary conditions are

$$T_r(R_1) = p_1 \quad T(R_1) = T_1 \quad u(R_2) = u_2 \quad J(R_2) = J_2$$
(115) - (116) - (117) - (118)

Reaplacing (41) e in (115), (34) in (116), (35) in (117) and (36) in (118), and solving for A, B, C and D, we obtain

$$A = T_1/R_1 - (R_2^3/kR_1)((kT_1 + J_2 R_1)/(R_2^3 + 2R_1^3))$$
$$B = (R_1^3 R_2^3/k)(kT_1 + J_2 R_1)/(R_2^3 + 2R_1^3)(2ER_2/((1 +$$
$$+ q)R_1^3) + E/((1 - 2q)R_1^2))\ D \qquad (119) - (120)$$

$$D = (p_1 R_2 - Eu_2/(-2q)) + (aER_2/(6(1 - q)))((3 -$$
$$- q)R_1/1 - 2q) - (1 + q)R_2/2)(T_1/R_1 - (R_2^3/kR_1)$$
$$(kT_1 + J_2 R_1)/(R_2^3 + 2R_1^3)) + (aE/(3(1 - q)(1 -$$
$$- 2q)))(2qR_2/R_1^2 - (1 + q)/R_2)((R_1^3 R_2^3/k)(kT_1 +$$
$$J_2 R_1)/(R_2^3 + 2R_1^3)) \qquad (121)$$

$$C = (1 - 2q)p1/E - (aR_1 (3 - q)/((1(1 - q)))(T_1/$$
$$/R_1 - (R_2^3/kR_1)(kT_1 + J_2 R_1)/(R_2^3 + 2R_1^3)) -$$
$$- (2q/(3(1 - q)))\ (aR_1 R_2^3/k)((kT_1 + J_2 R_1)/(R_2^3 +$$
$$+ 2R_1^3)) + (2(1 - 2q)/(1 + q))(D/R_1^3) \qquad (122)$$

Replacing (119) - (120) - (121) - (122) in equations (34) to (43), the temperature, displacement, heat flux, strain and stress tensores, colud be obtained, as in the proceding problems.

IV.3 – *PROBLEM 6*

We consider an hollow sphere of inner and outer radiuses $R_1$ and $R_2$, displecement $u_1$ ant and heat $J_1$ through the inner surface, tangential stress $t_2$ and heat convection from a fluid at free temperature $T_o$ at the outer surface. The boundary conditions are

$$u(R_1) = u_1 \qquad J(R_1) = J_1 \qquad T\ (R_2) = T\ (R_2) = t_2$$
$$J(R_2) = h(T(R_2\ 3 - T_o)$$
(123) - (124) - (125) - (126)

Replacing (35) in (123), (36) in (124), (42) in (125) and (24) - (36) in (126), and solving for A, B, C, and D, we obtain

$$A = -J_1/k + 2R_2^3 (khT_o + J_1 (hR_2 + k))/$$
$$/(2kR_2^3 (hR_2 + k) - hR_1^3 (2k - hR_2)) \qquad (127)$$

$$B = R_1^3 R_2^3 (khT_o + J_1 (hR_2 + k)/(2kR_2^3 (hR_2 + k) -$$
$$- kR_1^3 (2k - hR_2)) \qquad (128)$$

$$C = u_1/R_1 - (a(1 + q)R_1^2/(12(1 - q)))\ (-J_1/k +$$
$$+ 2R_2^3 (khT_o + J_1 ((hR_2 + k))/(2kR^3 (hR_2 + k) - kR_1^3$$
$$(2k - hR_2))) - ((1 + q)/(3(1 - q)))\ R_1 R_2^3 (khT_o +$$
$$+ J_1 (hR_2 + k))/(2kR_2^3 (hR_2 + k) - kR_1^3 (2k -$$
$$- hR_2))) - D/F_1^3 \qquad (129)$$

$$D = ((1 + q)(1 - 2q)/3q)(R_1^2/E)\ (Eu_1/(1 - 2q) - t_2$$
$$R_1) - (aR_1^4 (1 + q)(4 - 3q)/(36q(1 - q)))(-J_1/k +$$
$$+ 2R_2^3 (khT_o + J_1 (hR_2 + k))/(2kR_2^3 (k + hR_2^3) - kR_1^3$$
$$(2k - hR_2))) - aR_1^4 R_2^3 ((1 + q)(3q - 1)/(9q(1 - q)))$$
$$(khT_o + J_1 (hR_2 + k))/(2kR_2^3 (hR_2 + k) - kR_1^3$$
$$(2k - hR_2))) \qquad (130)$$

Replacing (127) - (128) - (129) - (130) in equetiois (34) to (43) we ?ould obtain the temperature, displacement, heat flux, strain and stress tensores.

IV.4 – *PROBLEM 7*

We consider a spherical layer of radius R and thickness e, at inner and outer surface temperature and pressure $p_1$, $T_1$ and $p_2$, $T_2$. The boundary conditions are

$$T(R - e/2) = T_1 \quad T(R + e/2) = T_2 \quad T_r(R - e/2) = p_1$$
$$T_r(R + e/2) = p_2 \qquad (131) - (132) - (133) - (134)$$

Replacing (34) in (131) - (132) and (41) in (133) (132) and (41) in (133) - (134), and solving for A, B, C and D, or, directely from equations (105) - (106) (107) - (108) of problem 4, using the relations (40), — that make boundary conditions identical — , and neglecting higher powers of e, we obtain

$$A = T_1/R + (T - T_1)/3e \qquad B = ((T_1 - T_2)/3e)\ R^3 \qquad (135) - (136)$$

$$C = (1 - 2q)p_1/E - ((1 - 2q)/E)(R(p_2 - p_1)/3e) + (2aR(3 - q)/(18(1 - q)))\ (T_1/R + (T_2 - T_1)/3e) - (10aqR/(9(1 - q)))((T_1 - T_2)/e) \qquad (137)$$

$$D = ((1 + q)/2E)(R^4\ (p_2 - p_1)/3e) + (aR^4/3)((3 - q)(1 + q)/(12(1 - q)\ (1 - 2q)))(T_1/R - (T_1 - T_2)/3e) + (aq(1 + q)/(5(1 - q)(1 - 2q)(2R^4\ (T_1 - T_2)/9e) \qquad (138)$$

From (125) - (126) and (34), the temperature is

$$T(r) = T_1\ r/R + ((T_1 - T_2)/3e)(r - R^3/r^2 \qquad (139)$$

and from (125) - 136) and (36) the non-venishing component of the heat flux is

$$J(r) = kT_1/R + k(T_1 - T_2)/3e + 2k((T_1 - T_2)/3e)(R^3/r^3) \qquad (140)$$

We could obtain the displacement vector, strain and stress tensores, replacing equations (135) to (138) in equations (34) and (38) to (43). For example, the displacement vector is

$$u(r) = (a(1 + q)/(12(1 - q)))(T_1/R - T_1 - T_2)/3e)r^2 + [(1 - 2q)p_1/E - ((1 - 2q3/E)(R(p_2' - p_1)/3e3 + (2a(3 - q)/(18(1 - q)))R(T_1/R + (T_2 - T_1)/3e) - 10aqR/(3(1 - q)))((T_1 - T_2)/3e)]\ r + (a(1 + q)/(3(1 - q)))R^3((T_1 - T_2)/3e)\ r^{-1} + [((1 + q)/2E)R^4\ ((p_2 - p_1)/3e) + (a(3 - q)(1 + q)/(36(1 - q)\ (1 - 2q)))R^4\ (T_1/R - (T_1 - T_2)/3e) + (2aq(1 + q)/(9(1 - q)(1 - 2q)))R^4((T_1 - T_2)/3e)]\ r^{-2} \qquad (141)$$

and the radial-radial component of the stress tensor

$$T_{rr}(r) = (aE(3 - q)/()(1 - q)(1 - 2q)))(T_1/R - (T_1 - T_2)/3e)\ r + [p_1 - R(p_2 - p_1)/3e - (E(3 - q/(6(1 - q)(1 - 2q)))(2e/3)(T_1/R - (T_1 - T_2)/3e) - (4aEq/(9(1 - q)(1 - 2q))((T_1 - T_2)/3e)] + (2aE/(3(1 - 2q)))R^3((T_1 - T_2)/3e)\ r^{-2} - [R^4(p_2 - p_1)/3e + (aE(3 - q)/((18(1 - Q)\ (1 - 2q)))R^4(T_1/R - (T_1 - T_2)/3e) + (4Eaq/(9(1 - 2q)))R_4((T_1 - T_2)/3e)]\ r^{-3} \qquad (142)$$

## V — *SPHERICAL CAVITY IN INFINITE MEDIUM*

### V.1 — *Problem 8*

We consider a spherical cavity of radius R, in an infinite medium, the pressure and temperature at the surface of the cavity being p and $T_o$ respectivell.

We remark that, in all spherical cavity problems, since the temperature (34) and Displacement (36) must remain finite as r tends to infinity

$$A = O = C \qquad (143)$$

The boundary conditions of this problem are

$$T(R) = T_o \qquad T_r(R) = p \qquad (144) - (145)$$

Replacing (34) in (144) and in (145), using (143), and solving for B and D

$$B = T_o R^2 D = -((1 + q)/2E)pR^3 + (q(1 + q)/(3(1 - q)(1 - 2q)))\ T_o R^3 \qquad (146) - (147)$$

From (143) - (146), and (34), (36)), the temperature and non-vanishing component of heat flux are

$$T(r) = T_o R^2/r^2 \qquad J(r) = 2kT_o R^2/r^3 \qquad J(R) = 2kT_o/R \qquad (148) - (149) - (150)$$

the former decreasing steadily from its value (144) at the cavity's surface, and also the latter, whose value at the cavity's surface is given by (150).

From (143) - (146) - (147) and (35) the displacement vector is

$$u(r) = -((+ q)/E)pr^3/r^2 + (aT_o(1 + q)/(3(1 - q)))(R^2/r + (q/(1 + q))R^3/r^2) \qquad (151)$$

so that the displacement of the cavity's surface is

$$u(R) = -((1 + q)/2E)pR + aT_oR(1 + 2q)/(3(1 - 2q)) \qquad (152)$$

From (143) - (146) - (147) and (38) - (39) - (40), the non-vanishing components of the strain tensor are

$$S_{rr}(r) = ((1 + q)/E)pR^3/r^3 - (aT_o\ (1 + q)/(3(1 - q)))(R^2/r^2 + (2q/(1 - q))R^3/r^3) \qquad (153)$$

$$S_{\theta\theta}(r) = S_{\varphi\varphi}(r) = -((1 + q)/2E)pR^3/r^3 + (aT_o(1 + q)/(3(1 - q)))(R^2/r^2 + (q/(1 - 2q))R_3/r^3 \qquad (154)$$

and from (41) - (42) - (43) the non-vanishing components of the stress tensor are

$$T_{rr}(r) = pR^3/r^3 + (2qEaT_o/("(1-q)(1-2q)))(R^2/ /r^2 - R^3/r^3) \quad (155)$$

$$T_{\theta\theta}(r) = T_{\varphi\varphi}(r) = -(p/2)R^3/r^3 + (2aET_o/(5(1- -2q)))(R^2/r^2 - (1/(1-q))R^3/r^3) \quad (156)$$

The stress-state at the surface of the cavity is hemi-spherical, specified by (145) and

$$T_\theta(R) = T_\varphi(R) = -p/2 - 2qEaT_o/(3(1- -q)(1-2q)) \quad (157)$$

V.2 — *Problem 9*

We consider a spherical cavity of radius R in an infinite medium with displacement $u_o$ and heat flux $J_o$ through its surface. The boundary conditions are

$$u(R) = u_o \qquad J(R) = J_o \quad (158) - (159)$$

Replacing (35) in and (36) in (159)( using (143), and solving for B and D

$$B = J_o R^3/2k \quad D = u_o R^2 - ((L=q)/(3(1- -q))aJ_o R^4/2k \quad (160) - (161)$$

From (143) - (160) and (34) the temperature is given by (162), and decreases steadily from its value (163) at the surface of the cavity. The non-vanishing component of the heat-flux is, from (145) - (160) and (36), given by (164), and also decreases steadily from its value (159) at the surface of the cavity.

$$T(r) = (J_o/2k)R^3/r^2 \quad T(R) = J_o R/2k \quad J(r) = J_o R^3/r^3 \quad (162) - (163) - (164)$$

From (143) - (160) - (161) and (35) the displacemente vector is given

$$u(r) = u_o R^2/r^2 + (a(1+q)/(3(1-q)))(J_o R^2/ /2k)(R/r - R^2/r^2) \quad (165)$$

its value at the surface of the cavity is (158), and its maximum is at tha radius $R_m$

$$R_m = 2R - (3(1-q)/(1+q))(2k/aJ_o R)$$

$$R_m^2 u(R_m) = u_o R^2 - R^3 + ((L+q)/(3(1-q)))(aJ_o R^4/2k) \quad (167)$$

From (143) - (160) - (161) and (38) - (39) - (40), the non-vanishing components of the strain tensor are

$$S_{rr}(r) = -2u_o R^2/r^3 + ((1+q)/(3(1-q))(aJ_o R/ /2k)(2R^3/r^3 - R^3/r^2) \quad (168)$$

$$S_{\theta\theta}(r) = S_{\varphi\varphi}(r) = u_o R^2/r^3 + ((1+q)/(3(1- -q)))(aJ_o R/2k)(R^2/r^2 - R^3/r^3) \quad (169)$$

and from (41) - (42) - (43) the non-vanishing of the stress tensor are

$$T_{rr}(r) = -(2E/(1+q))u_o R^2/r^3 + (2E/(3(1- -q)))(aJ_o R/2k)((q/(1-q))R^2/r^2 - R^3/r^3) \quad (170)$$

$$T_{\theta\theta}(r) = T_{\varphi\varphi}(r) = (E/(1+q))u_o R^2/r^3 + (E/(3(1- -q)))(aJ_o R/2k)R^3/r^3 + (2E/(3(1-2q)))(aJ_o R/ /2k)R^2/r^2 \quad (171)$$

The stress-state at the surface of the cavity is hemi-spherical

$$T_r(r) = -(2E/(1+q))u_o/R + (2E(3q-1)/(3(1- -q)(1-2q)))(aJ_o R/2k) \quad (172)$$

$$T_\theta(r) = T_\varphi(r) = (E/(1+q))u_o/R + (E(3- -4q)/(3(1-q)(1-2q)))(aJ_o R/2k) \quad (173)$$

V.3 — *Problem 10*

We consider a spherical cavity of radius R in an infinite medium, with tangential stress $t_o$ at its surface, and heat convection from a fluid at free temperature $T_o$ through its surface. The boundary conditions are

$$T(r) = T(R) = T_o \qquad J(R) = h(T(R) - T_o) \quad (174) - (175)$$

Replacing (42) in (174), and (34) - (36) in (175), using (-43), and solving for B and D, we obtain

$$B = hT_o R^3/(2k + hR) \qquad D = ((1+q)/E)t_o R^3 - -(2(1+q)/(3(1-2q)))(ahT_o R^4/(2k+hR)) \quad (176)$$

From (176) - (143) and (34), the temperature is given by (178), and (177) decreases steadily from its value (179) at the surface of the cavity

$$T(r) = (hT_o/(2k + hR))R^3/r^3$$

$$T(R) = hT_o R/(2k + hR) \quad (178) - (179)$$

From (176), (143) and (36), the non-vanishing component of the heat flux is (180), and it decreases steadily from the value (181) at the surface of the cavity

$$J(r) = (2khT_o/(2à + hR))R^3/r^3$$

$$J(R) = 2khT_o/(2k + hR) \quad (180) - (181)$$

From (143), (176), (177) and (35) the displercement vector is

$$u(r) = ((1 + q)/(3(1 - q)))(ahT_o R/(2k + hR)) R^2/r + ((L - q)/E)t_o R^3/r^2 - (2(1 + q)/(3(1 - 2q)))(ahT_o R/(2k + hR))R^3/r^2 \quad (182)$$

and the displacement of the cavity's surface is

$$u(R) = ((1 + q)/E)t_o R - ((1 + q)/(3(1 - q)(1 - 2q)))(ahT_o R^2/(2k + hR)) \quad (183)$$

From (143) - (176) - (177) and (38) - (39) - (40), the non-vanishing components of the Strain Tensor are

$$S_{rr}(r) = -((1 + q)/(3(1 - q)))(ahT_o R/(2k + hR))R^2/r^2 - (2(1 + q)/E)t_o R^3/r^3 + (4(1 + q)/(3(1 - 2q)))(ahT_o R/(2k + hR))R^3/r^3 \quad (184)$$

$$S\ (r) = S\ (r) = ((1 + q)/(3(1 - q)))(ahT_o R/(2k + hR))R^2/r^2 + ((1 + q)/E)t_o R^5/r^3 + (2(1 + q)/(3(1 - 2q)))(ahT_o R/(2k + hR))R^3/r^3 \quad (185)$$

and from (41) - (42) - (43) the non-vanishing components of the Stress Tensor are

$$T_{rr}(r) = -2t_o R^3/r^3 + (2E/(3(1 - 2q))))(ahT_o R/(2k + hR))(2R^3/r^3 + (q/(1 - q))R^2/r^2) \quad (186)$$

$$T\ (r) = T\ (r) = t_o R^3/r^3 + (2E/(3(1 - 2q)))(ahT_o R/(2k + hR))(R^2/r^2 - R^3/r^3) \quad (187)$$

The Stress-state at the cavity surface, is hemispherical, specified by (174) and

$$T_r(R) = -t2_o + (2E(2 - q)/(3(1 - q)(1 - q)))(ahT_o R)/(2k + hR)) \quad (188)$$

BIBLIOGRAPHY


L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ — Course of Theoretical Physics, Vol. VII, Theory of Elasticity, Pergamon Press, 1959.

A. E. H. LOVE — A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 1927, 4th Edition, Dover.


# FEIRAS, CONFERÊNCIAS, EXPOSIÇÕES E CURSOS NO MUNDO

| OBJECTIVO E PROGRAMA | LOCAL, DATAS, ORGANIZAÇÃO INFORMAÇÕES |
|---|---|
| High — Voltage D. C. Transmission | London, 18 - 21 Setembro - 73<br>IEE |
| IHA 73<br>Exposição Internacional de Máquinas - Ferramentas | Hannover, 18 - 27 Setembro - 73<br>Câmara de Comércio Luso-Alemã |
| The use of Digital Computers in Measurement | London, 24 - 27 Setembro - 73<br>IEE |
| Exposition Mondiale de L'ingénierei des Chemins de Fer | Bâle, 1 - 5 Outubro - 73<br>4000 Bâle 21 |
| FILPLASTO | Lisboa, 8 - 14 Outubro - 73<br>FIL |
| FILEME | Lisboa,3 - 8 Novembro - 73<br>FIL |
| Interocean 73 | Düsseldorf, 13 - 18/11/73 |
| Simpósio de Didática Universitária | Ida - Viena - Dezembro - 1973 |
| CONSTRUCTA 1974<br>Exposição Internacional especializada em Construção Civil | Hannover, 2 - 10 Fevereiro - 74<br>CCILA |
| Feira de Hannover 1974 | Hannover 25 Abril - 3 Maio - 74<br>CCILA |

C. D. U. 658.7

# FUNÇÃO APROVISIONAMENTO — GESTÃO DE STOCKS SUA INFLUÊNCIA NA ECONOMIA DAS EMPRESAS E DOS PAÍSES

FRANCISCO PRISTA CAETANO

RESUMO

*Justifica-se teoricamente das vantagens económicas da existência dum serviço único de Aprovisionamentos dentro duma empreza, ou do agrupamento de emprezas para um Serviço de Aprovisionamento comum, ou ainda, ao nível comercial dum país, as vantagens do recurso ao comerciante/representante/distribuidor em vez de importarem.*

SYNOPSIS

*This is a theoretical justification of the economic advantages which results when, within one company all buyng and stocks are concentrated in only one service and, simmilarly, the same happens when some Companies came to an agreement for a unic Procurement Service, or at the country commercial level, the companies decide to buy from the dealers instead of importing*

## INTRODUÇÃO

Recentes disposições legislativas (1) disciplinaram, em Angola, o regime das importações. Tal legislação implica ainda que no nosso país se passa a tomar em atenção a importância que as técnicas de APROVISIONAMENTO, nomeadamente a Gestão de Stoks, têm na economia das empresas e dos países.

Há já alguns anos que, por força da minha vida profissional, tive de inteirar-me do que era a função Aprovisionamento e, actualmente, encontro-me mesmo a organizar tal serviço numa importante empresa Angolana. Daí o sentir com maior acuidade a importância de tal legislação e o que ela pode representar para o desenvolvimento do país.

Transcrevemos, da Circular n.º 22 da Direcção dos Serviços de Comércio da Província de Angola, o terceiro parágrafo da página 7:

— «Sempre que possível, devem os importadores inscritos na classe única recorrer ao Comércio local para aquisição do que necessitem para as suas actividades, evitando o recurso directo à importação, que é muitas vezes anti-económica, o que contribuirá para o aparecimento de comércio especializado de apoio à indústria.»

Exprime tal afirmação o desejo da governação para que os importadores inscritos na classe única limitem a sua actividade de Importação comprando em Angola, aos Representantes dos Fabricantes, os produtos de que necessitam.

Este procedimento permitirá dentro de algum tempo, aos Organismos Económicos, ter uma ideia real dos consumos de Angola e, assim, orientar a criação de parque Industrial com bases realísticas.

Além desta acção de futuro há ainda uma resultante económica imediata que será tanto mais espectacular e efectiva quanto mais rapidamente os senhores Industriais-Importadores resolverem comprar aos representantes em vez de importar, e *exigir* destes a constituição de stocks capazes de satisfazer as necessidades das suas indústrias.

Foi o ver «oficializado», um ponto de vista que há tanto tempo tenho vindo a advogar, que me levou a fazer algumas considerações teóricas simples mas que, no entanto, provam a justeza da legislação que citei como tendente a uma economia imediata, não só para o próprio país como também para as empresas.

O assunto Gestão de Stocks tem sido tratado por vários estudiosos sendo Wilson um dos mais conhecidos, e é a partir dos seus estudos que faremos as nossas considerações.

## GESTÃO DE STOCKS

A quantidade económica $Q$ a encomendar de cada vez é dada pela fórmula de Wilson.

$$Q = \sqrt{\frac{2\,A\,N}{r.\,p}}$$

na qual é

(1) Decreto-Lei N.º 478/71, de 1971. Nov. 06, Portaria Ministerial N.º 703/71, de 1971. Dezembro. 15 e Decreto N.º 552/71 da mesma data.

A — Custo unitário de efectivação duma encomenda.
N — Consumo anual em unidades.
P — Preço unitário pago ao fornecedor.
r — Coeficiente de custo de posse de stock. (0.15 a 0.20 do valor do stock).

A fórmula de Wilson obtém-se a partir da consideração do custo total *C* de Aprovisionamento, o qual é constituído por:

— Custo de aquisição. $C1 = N.p$

— Custo da encomenda. $C2 = A \cdot \frac{N}{Q}$

— Custo de posse de stock $C3 = r.p. \frac{Q}{2} + \frac{r.A}{2}$

$$C = C1 + C2 + C3 =$$

$$= N.p + A. \frac{N}{Q} + r.p. \frac{Q}{2} + \frac{r.A}{2}$$

em que N, p, A, Q e r são as mesmas entidades indicadas atrás.

Consideremos *n* empresas que teriam de Aprovisionar um mesmo bem de consumo e que o podem fazer independentemente ou agruparem-se para um Aprovisionamento único.

A quantidade total a encomendar de cada vez pela empresa seria

$$Q_t = \sum_1^n Qn = n\ Qm$$

em que $Qm = \frac{\sum_1^n Qn}{n}$ seria a quantidade média a encomendar por cada empresa.

Do mesmo modo, o consumo anual total $N_t$ das *n* empresas, seria

$$N_t = \sum_1^n N_n = n \times N_m$$

em que $N_m = \frac{\sum_1^N Nn}{n}$ é o consumo médio anual de cada uma das *n* empresas.

Portanto, se uma empresa única comprar para as *n* empresas, o custo total será:

$$C_T = N_t\ .\ p + A.\ \frac{Nt}{Q_E} + r.p.\ \frac{Q}{2} + \frac{r.A}{2}$$

em que $Q_E$ será a quantidade económica a comprar de cada vez pela empresa única.

Pela mesma dedução de Wilson será:

$$Q_E = \sqrt{\frac{2 \times A \times N_t}{r.p}}$$

ou

$$Q_E = \sqrt{\frac{2 \times A \times n \times N_m}{r.p}} = \sqrt{n} \times \sqrt{\frac{2 \times A \times N_m}{r.p}}$$

mas

$$\sqrt{\frac{2 \times A \times N_m}{r.p}} = Q_m = \frac{Q_t}{n}$$

que representa a quantidade económica média que teria de ser adquirida por cada uma das empresas, individualmente.

Podemos portanto concluir que

$$Q_E = \frac{\sqrt{n}}{n} \times Q_t$$

ou

$$Q_E = \frac{1}{\sqrt{n}} \times Q_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sum_1^n Q_n$$

Isto é, a quantidade económica a adquirir por uma só empresa é uma fracção da totalidade das quantidades económicas a adquirir por cada uma das empresas e essa fracção é exactamente o inverso da raiz quadrada do número de empresas que se agruparem.

Apresentamos em seguida um exemplo valorizado com que desejamos ilustrar o que dissemos.

Vamos considerar um modelo constituído por n = 5 empresas industriais.

Consideremos um bem de consumo necessário e fundamental à vida daquelas empresas.

Para facilidade de exposição consideraremos que todas aquelas empresas teriam o mesmo valor de consumo anual e que todas têm bem organizados os seus serviços de Aprovisionamentos, com os respectivos sectores de Armazém, Compras, Gestão de Stock, Recepção e Técnica e que, portanto, têm os mesmos valores característicos para:

A = 2000$00 (encomenda ao estrangeiro).
N = 10 000/ano.
p = 20$00.
r = 0.2 (20%).

$$Q = \sqrt{\frac{2.A.N}{r.p}} = \sqrt{\frac{2 \times 2\,000 \times 10\,000}{0.2 \times 20}} = 3\,160$$

A quantidade total que todas as 5 empresas teriam de comprar seria portanto:

$$Q_t = 5 \times Q = 15\,800$$

A quantidade económica que a empresa única compraria seria:

$$Q_E = \frac{1}{\sqrt{n}} \times Q_t = \frac{1}{\sqrt{5}} \times 15\,800 = 7\,085$$

Se considerarmos os valores

$$Q_t = 15\,800 \times 20\$00 = 316\,000\$00$$
$$Q_E = 7\,085 \times 20\$00 = 141\,700\$00$$

Portanto:

Economia somente em empate de capital174 300$00.

É interessante notar que este raciocínio também se aplica aos vários sectores utilizadores dentro duma mesma empresa e, portanto, podemos concluir e devemos recomendar que não devem os vários sectores duma mesma empresa constituir «stocks» particulares mas sim requisitarem ao Serviço de Aprovisionamento somente os materiais de que necessitem para uso imediato.

O Serviço de Aprovisionamento comportar-se-á como a empresa única a comprar e «stockar» para todos os sectores consumidores da empresa.

# FEIRAS, CONFERÊNCIAS, EXPOSIÇÕES E CURSOS NO MUNDO

| OBJECTIVO E PROGRAMA | LOCAL, DATAS, ORGANIZAÇÃO INFORMAÇÕES |
|---|---|
| Exposição alemã de aviação 1974 | A seguir à feira de Hannover |
| Beama electrical insulation conference for 1974 | Brighton, 7 - 9 Maio - 74<br>8, Leicester St.<br>London WC2H 7BN<br>England |
| GIFA — 1974 (Exposição Internacional de Fundição) | Düsseldorf, Maio - 74 |
| 5.° Congresso da Fédération Internationale de la Précontrainte | Nova Iorque, 26 Maio - 1 Junho - 74<br>FIP - Terminal House<br>Grosvernor Gardens, London, S. W. 1, Ingl. |
| PRO AQUA — PRO VITA<br>6.° Salon International de la protection du milieu vital — eau, faux usées, air, déchets, bruit | Bâle, 11 - 15 Junho - 74<br>4000 Bâle 21 |
| International Federation for Information Processing — Congress 1974 | Stockolm, 5 - 10 Agosto - 74<br>3, Rue du Marché, 1204 Geneve, Suíça |
| VIII Feira Internacional de Soldadura | Essem, RFA 19 - 27/9/74 |
| 9.ª reunião da Conferência Mundial de Energia<br>Tema: Os desafios postos pelas futuras necessidades energéticas à economia e ao meio ambiente | Detroit, 22 - 27 Setembro - 74 |
| OCEANEXPO 1974 | Bordeaux, 1 - 6 Outubro - 74 |
| Salão de Tratamento de Superfícies Surface | Basileia, 30/9 - 4/10 de 1975<br>Inf. «Surface 75» CA - 4021 Basel Schoveiz |

# "MUNDO TÉCNICO"

## MATERIAL PARA SEGURANÇA INDUSTRIAL

Foi lançado no mercado um material transparente que pode constituir uma protecção muito eficaz para o pessoal de oficinas de soldadura, mecanização, moldagem, carpintaria e fundição.

Este material é tão resistente que pode impedir a passagem de uma bala de 5 mm disparada a 23 m de distância.

Trata-se de uma lâmina de acetato de celulose, que é inestilhaçável e adequada para a fabricação de protecções de máquinas, óculos de protecção, visores e janelas de segurança.

A sua resistência ao impacto é, pelo menos, 12 vezes maior que a chapa acrílica e duas vezes e meia mais rígida que a de cloreto de polivinilo.

Ainda que seja perfurado o material por fragmentos a grande velocidade não se estilhaça.

O material reune boas propriedades priorresistentes e um ritmo de combustão que foi classificado de lento a autoextintor.

Este acetato de celulose é de fácil moldagem, podendo ser moldado normalmente.

Não se amarela com o tempo, e vende-se em várias cores para melhorar a protecção da vista na soldadura. (DYNNA)

L. A. Petri.

S. A. Gerona 78 Barcelona-9.

## RENOVAÇÃO DO REVESTIMENTO DE UM FORNO DE REVENIR COM FIBRA CERÂMICA

Num forno de revenir da «Safir», França, tirou-se recentemente o revestimento inicial de ladrilhos refractários e colocou-se no seu lugar outro de fibra cerâmica, em 70 horas, depois das quais o forno se achava em condições de começar a funcionar imediatamente.

A renovação do revestimento com materiais refractários normais teria exigido muito mais tempo e o período de intercepção na produção teria de ser prolongado enquanto não terminasse de secar.

A fibra cerâmica utilizada foi Triton Kaowool, material apropriado para emprego até 1260° C e que pesa a sexta parte do ladrilho refractário isolante.

É completamente elástico e insensível aos efeitos da expansão técnica, porque a expansão de cada uma das fibras fica absorvida dentro do material.

No sitio mais denso deste revestimento a condutividade térmica é inferior a 35% da do ladrilho refractário isolante e a sua capacidade de acumulação de calor é $^1/_4$ aproximadamente desse ladrilho.

Estas propriedades permitem obter uma redução considerável nos tempos de caldeação e de esfriamento e a economia no consumo, chega a ser de 15%. (DYNNA)

## BOMBA PNEUMÁTICA

A ENERPAC apresenta uma nova linha de bombas pneumáticas de alta pressão denominadas «Bomba pneumática dupla».

Esta bomba possui as seguintes dimensões 380×320×308 mm, completamente portátil, pode ser ligada a qualquer linha de ar comprimido da oficina, incluindo o compressor móvel.

A máxima pressão hidráulica é de 700 bars (ou 10 000 Psi) e pode ser regulada pelo ajustador da linha de ar.

A originalidade desta bomba pneumática reside na aplicação de 2 pequenos motores pneumáticos:

— Um para o avanço rápido, admitindo o alto fluxo e baixa pressão da linha de ar a 7 kg/cm2 (1 galão por minuto com 100 Psi — pressão pneumática).

— Um para alta pressão, permitindo pequeno fluxo de óleo a alta tensão.

(0.16 l/m a 700 kg/cm2 (pressão pneumática 7 kg/cm2) 10 in3 a 10 000 Psi (pressão-pneumática 100 Psi).

Esta bomba tem um ruído inferior a 80 decibeis (ROMAR).

# Resumo dos artigos publicados na Técnica n.º 419

## Ano XLVIII — Janeiro 1973

ARMANDO NUNES PIRES CAMEIRA C. D. U. 656.01

ALGUNS CONCEITOS BASICOS RELATIVOS À PROBLEMATICA DOS TRANSPORTES

Técnica N.º 419 — XLVIII — 1-1973, p. 159 - 164

O presente artigo contém alguns conceitos gerais sobre a engenharia de transportes. Constitui o texto de uma lição dada num curso de férias aos alunos de eng.º civil, promovido pelo Departamento de Comunicações do I. S. T.

JAIME M. COSTA OLIVEIRA C. D. U. 621.039.5
CARLOS A. MORAIS DA VEIGA

DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO REACTOR PORTUGUÊS DE INVESTIGAÇÃO À POTÊNCIA ZERO

Técnica N.º 419 — XLVIII — 1-1973, p. 191-200

Mediu-se a função de transferência do Reactor Português de Investigação (RPI), a baixa potência, pelo método de modulação da reactividade, na banda de frequências compreendida entre $5.10^{-3}$ Hz e 65 Hz. Descrevem-se as características dos dispositivos experimentais e da técnica de medição utilizados, bem como o princípio do tratamento numérico dos dados experimentais.
O modulador concebido para esta experiência possuía boas características de estabilidade para as frequências estudadas e a técnica adoptada na detecção de análise da resposta do reactor revelou-se muito eficaz. Os resultados obtidos são comparados com os fornecidos pela teoria cinética pontual, constatando-se a influência dos harmónicos espaciais no comportamento dinâmico do reactor, a qual não é tida em conta pelo modelo pontual. Dos valores da função de transferência deduz-se para o tempo de geração dos neutrões instantâneos do RPI o valor $\Lambda = (56 \pm 2).10^{-6}$ s para uma fracção efectiva dos neutrões retardados $\beta_e = (760 \pm 23).\ 10^{-5}$.

OLIVÉRIO SOARES C. D. U. 537.311.6:621.3.126

CONSIDERAÇÕES SOBRE A INDUTANCIA DUMA MAQUINA DE CORRENTE CONTINUA

Técnica N.º 419 — XLVIII — 1-1973, p. 165-170

O autor expõe o conceito de indutância, e aplica-o às máquinas de corrente contínua.
O artigo é a compilação de ideias, para desenvolvimento ulterior, em que são invocadas relações importantes.

C. D. U. 539.3:536.24

LUIS MANUEL BRAGA DA COSTA CAMPOS

ALGUNS PROBLEMAS DE SIMETRIA ESFÉRICA NO CONTORNO (FRONTEIRA) EM REGIME PERMANENTE NUM MEIO ANISOTÉRMICO E ELASTICO

Técnica N.º 419 — XLVIII — 1-1973, p. 201-210

O objectivo deste artigo é estudar uma classe de problemas inter-relacionados, respeitantes à determinação da temperatura, vector de fluxo de calor, vector de deslocamento, tensor de deformação, tensor de tensão e vector de tensão, de um meio linear, homogéneo, isótropo e elástico, em regime permanente, com condução de calor, para 4 geometrias esféricas — esfera oca, camada esférica, esfera maciça e cavidade esférica num meio infinito —, e condições na fronteira especificando a deslocação superficial, a pressão ou a tensão tanjencial, e a temperatura, o fluxo de calor ou condições de convecção.
Alguns problemas de simetria esférica às condições na fronteira em regime permanente num meio anisotérmico e elástico.

C. D. U. 621.396:551.596.7

JOSÉ A. C. SARAIVA MENDES

MEDIDAS DE ATENUAÇÃO A 11 GHz EM AMBIENTE CHUVOSO

Técnica N.º 419 — XLVIII — 1-1973, p. 171-179

Este trabalho destina-se a apresentar alguns resultados experimentais provenientes de medidas de atenuação, feitas em dois percursos a 11 GHz durante os anos de 1970 e 1971. Analisa-se também um método de cálculo proposto por P. Quarta, permitindo o cálculo da distribuição estatística da atenuação instantânea prevista num percurso, a partir da distribuição estatística da precipitação média horária relativa a qualquer ponto da região onde se encontra esse percurso.

FRANCISCO PRISTA CAETANO C. D. U. 658.7

FUNÇÃO APROVISIONAMENTO — GESTÃO DE STOCKS SUA INFLUÊNCIA NA ECONOMIA DAS EMPRESAS E DOS PAISES

Técnica N.º 419 — XLVIII — 1-1973, p. 211-213

Justifica-se teoricamente das vantagens económicas da existência dum serviço único de aprovisionamentos dentro duma empresa, ou do agrupamento de empresas para um Serviço de Aprovisionamento comum, ou ainda, ao nível comercial dum país, as vantagens do recurso ao comerciante/representante/distribuidor em vez de importarem.

D. F. G. DURÃO C. D. U. 532.544

INVESTIGAÇÕES EXPERIMENTAIS EM JACTOS COAXIAIS

Técnica N.º 419 — XLVIII — 1-1973, p. 181-189

Apresentam-se medidas da média e flutuações de velocidade assim como das flutuações do sinal eléctrico do fio quente. Elas são uma investigação preliminar do escoamento para confirmar a possibilidade de ser usado em medições detalhadas dos parametros da turbulência. A concentricidade do escoamento é confirmada e tem um perfil de velocidade média totalmente desenvolvido a 30 diâmetros.

# Synopsis of articles published in «Técnica» n.° 419

## XLVIII — January 1973

JAIME M. COSTA OLIVEIRA
CARLOS A. MORAIS DA VEIGA

U. D. C. 621.039.5

ZERO POWER TRANSFER FUNCTION MEASUREMENT OF THE PORTUGUESE RESEARCHE REACTOR (RPI)

Técnica N.° 419 — XLVIII — 1-1973, p. 191-200

The zero power transfer function of the Portuguese Research Reactor (RPI) was measured using the reactivity oscillation technique over the frequency range of $5.10^{-3}$ Hz to 65 Hz. The experimental set-up and measurement technique used are described, as well as the numerical handling of the data.
The reactivity oscillator designed for the present experiment had good stability at the frequencies studied and the technique used in the detection and analysis of the reactor output proved to be very efficient. The results obtained are compared to the point-reactor kinetics model and the effect of the space harmonics on reactor dynamics is observed. From the measured transfer function a prompt neutron generation time of $\Lambda = (56 \pm 2).\ 10^{-6}$ sec is obtained with an effective delayed neutron fraction $\beta_e = (760 \pm 23).\ 10^{-5}$.

ARMANDO NUNES PIRES CAMEIRA

U. D. C. 656.01

SEVERAL BASIC CONCEPTS ON TRANSPORTATION ENGINEERING

Técnica N.° 419 — XLVIII — 1-1973, p. 159-164

This paper contains several and general concepts on transportation engineering. It was a lesson given during holyday's course at engineer's students, promoted by Departamento de Comunicações of I. S. T.

U. D. C. 539.3:536.24

LUIS MANUEL BRAGA DA COSTA CAMPOS

SOME SPHERICAL-SIMETRY BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN STEADY-STATE ANISOTHERMAL ELASTIC MEDIUM

Técnica N.° 419 — XLVIII — 1-1973, p. 201-210

The purpose of this article is to study a class of interrelated problems, concerning the determination of the temperature, heat flux vector, displacement, vector, strain tensor stress tensor, and stress vector, of a linear, homogeneous, isotropic elastic medium, in steady-state, with heat conduction, for 4 spherical geometries — hollow sphere, spherical layer, solid sphere and spherical cavity in infinite medium—, and a range of boundary conditions, — given surface displacement, pressure or tangential stress, and temperature, heat flux, or convection conditions.

OLIVÉRIO SOARES

U. D. C. 537.311.6:621.3.126

SOME CONSIDERATIONS ON THE INDUTANCE OF A DIRECT CURRENT MACHINE

Técnica N.° 419 — XLVIII — 1-1973, p. 165-170

The author explains the conceit of inductance and applies it to direct current machines.
The article is the compilation of ideas for an ulterior development, in which important relations are invoked.

FRANCISCO PRISTA CAETANO

U. D. C. 658.7

IMPORTANCE OF THE FUNCTION SUPLY — MANAGEMENT OF STOCKS

Técnica N.° 419 — XLVIII — 1-1973, p. 211-213

This is a theoretical justification of the economic advantages which results when, within one company all buyng and stocks are concentrated in only one service and, simmilarly, the same happens when some Companies came to an agreement for a unic Procurement Service, or at the country commercial level, the companies decide to buy from the dealers instead of importing.

U. D. C. 621.396:551.596.7

JOSÉ A. C. SARAIVA MENDES

ATTENUATION MEASUREMENTS AT 11 GHz UNDER RAIN CONDITIONS

Técnica N.° 419 — XLVIII — 1-1973, p. 171-179

This paper shows some experimental results obtained during 1970 and 1971 on two paths at 11 GHz. The analysis of a method proposed by P. Quarta is also carried out. Such method allows the evaluation of the statistical distribution of the instantaneous attenuation on a path, from the knowledge of the statistical distribution of the hourly mean rain rate measured at any point of the country where the path in located.

D. F. G. DURÃO

U. D. C. 532.544

EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF CO-AXIAL JETS

Técnica N.° 419 — XLVIII — 1-1972, p. 181-189

Measurements of mean and rms velocity and rms electrical signal from a hot-wire are reported. These measurements represent the preliminary flow investigation necessary to confirm that the flow is suitable for detailed turbulence measurements. The concentricity of the flow is confirmed and the flows, as a result of the fully developed initial profile, show to have a fully developed mean velocity profile at 30 diameters from the jet exit.

# BIBLIOGRAFIA

## ARTIGOS DE REVISTAS

C. D. U. 658.57 : 331.875 : 656.2

Méthode pour la détermination des valeurs optimales à retenir pour le poids et la vitesse des trains de voyageurs — *F. P. Kotchnev*
Rail Int. *3* (2) 1972, 102-113

C. D. U. 661.935 : 681.3 (493)

Un calculateur ACEC contrôle et optimise le processus d'une unité de production d'oxygène — *Tonnelier G.*
Revue ACEC, N.° 3-4, (1971), Pág. 13-20

C. D. U. 663.6

Nuevo Método en la depuración de aguas residuales — *Justo Leácer*
Informes de la Construcción, 24 (238), págs. 69-72, Março 1972

C. D. U. 666.912 : 621.316.7-523.8 : 681.3

Commande par calculateur industriel d'un four à chaux droit, chauffé au coke — *Fischbach, H.-P.; Kampke, H.*
Rev. Siemens 29 (1971) N.° 2, Págs. 79-83

C. D. U. 669.15 : 62.002 (485)

The steel industry in sweden
Metalurgia and metal Forming, *39* (1972), Pág. 117

C. D. U. 669.2.886 : 669.5

Contribution a L'étude de l'influence de la composition du bain de zinc sur la résistance a la corrosion obtenus par galvanisation — *Claude Cabrillac*
Electricité de France, 2-1970, N.° 2, Pág. 43

C. D. U. 669.18-982.046.517

Estudos sobre cinetica de la desgasificación en vacio del Hierro y del acero fundidos — *J. Calvo Gomez*
Rev. Met. CENIM, 7 (3) 1971, Pág. 218-229

C. D. U. 669 : 539.42

Casos de fractura em camisas de motor Diesel — *A. Seabra*
Memória 388 do LNEC, 1971

C. D. U. 669.299.004 : 624.191.4 : 624.191.8.656.2

L'emploi des indicateurs radioactifs pour les recherches sur la ventilation et l'étanchéité dans la technique ferroviaire — *P. Cabos*
Rail International, 19-1970, N.° 10, Pág. 667

C. D. U. 669.37 : 72=6

La protección de los metales de base cobre para aplicaciones en arquitectura — *B. B. Moreton*
CENIM, 12-1970, Vol. 6, N.° 6, Pág. 645

C. D. U. 675.042

Études concernant l'amélioration de la qualité de l'extria de bois de chêne — *Gh. Chiriţă A. Ciobanu, M. Maucin*
Bul. Inst. Pol. Iasi, *17* (21), f. III-2 (1971) Pág. 115

C. D. U. 678.84 (045)=60

Siliconas — *G. Muntaner*
ION, *31* (1971), Pág. 716

C. D. U. 677.05

Progrés dans la construction des machines textiles suisse —*E. Wegmann*
Technique Suisse, 1-1971, N.° 1, Pág. 43

C. D. U. 681.32 : 6

Los ordenadores de procesos - algunos casos concretos de su aplicacion — *Rafael Magallon Martinez*
Anales de mecanica y electricidad, 1-2/71, vol. 68, N.° 1, Págs. 47-54

C. D. U. 681.4.001.1

Aplicación de los metodos de programación dinámica, cuádrica y entera al problema de selección de proyectos — *Valentin P. de Heredia*
DYNA, *46* (10) 1971, 453-459

C. D. U. 683.9

Les installations suisses de climatisation vues sur le plan international — *E. Gutzwiller*
Technique Suisse, 1-1971, N.° 1, Pág. 60

C. D. U. 696.6 (469.4)

As instalações eléctricas em Portugal — *José Ribeiro Pereira*
Engenho, *26* (4) 1971, 219-224

C. D. U. 699.8 : (045) = 60

Protección del hormigón frente a los agentes agresivos — *O. F.-P. Secades*
ION, *32*, p. 160 (1972)

C. D. U. 691.175.742.2-462 : 620.193
691.175.742.2-462 : 696.1

Recomendações na utilização de tubos de polietileno na construção — *Fernando de Moura Leal*
Memórias da Ordem dos Engeheiros, 1971, col. (EC-2)

C. D. U. 621.316.3.001.4

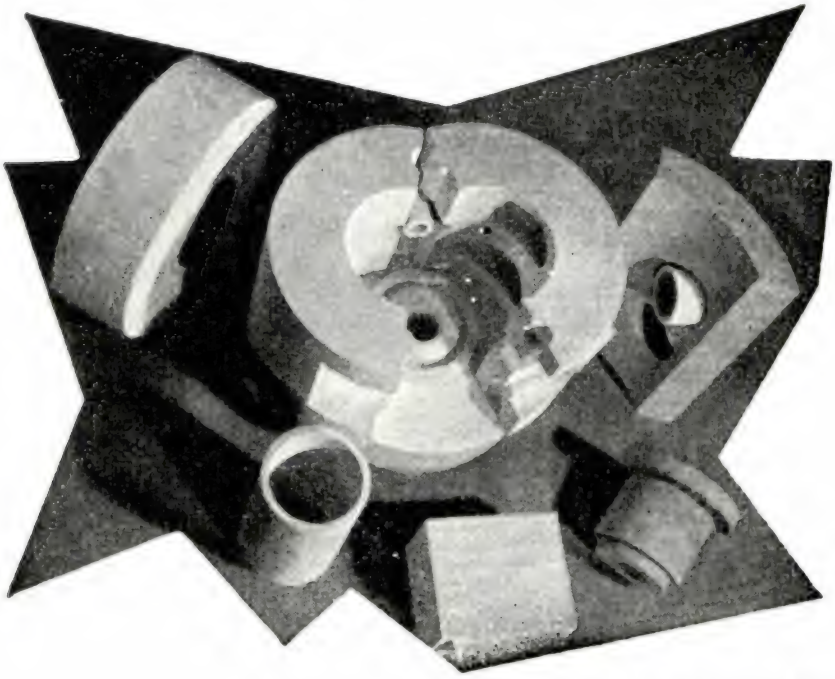
Essais des cellules mayenne tension à disjoncteur débrochable, type 8 B, pour 6 à 30 Iv — *L. Hashoff; H. Sanders*
Rev. Siemens, Maio de 1971, pág. 162

C. D. U. 621.316.933.001.4

Nouveau montage d'essai pour l'essai de fonctionement des parafoudres aus ondes de courent de longue durée d'un générateur de choc à constates réporties — *W. Jakezt*
Rev. Siemens, Abril 71, vol. 1971, pág. 131

a técnica moderna emprega

# BETÕES REFRACTÁRIOS



à base dos cimentos

## FONDU LAFARGE

e

## SECAR 250

porque são

práticos
eficientes
económicos

REFRACTÁRIOS ATÉ 1800° C

REFRACTÁRIOS ISOLANTES ATÉ 1700° C

**Os nossos serviços técnicos, especializados, estão à vossa inteira disposição para estudar, sem qualquer encargo da vossa parte, a adaptação dos BETÕES REFRACTÁRIOS a todos os vossos problemas**

AGUIAR & MELLO L.DA

**P. do Município, 13-1.º — LISBOA — Tel. 32 11 51/2**

SOCIEDADE DE CONSTRUÇÕES

**AMADEU GAUDÊNCIO**

LIMITADA

SEDE — R. ALEXANDRE BRAGA, 4-A — LISBOA
Tel. 56 00 51 — Telg. CONSTRUÇAO
R. CASAL DO PEDRO, 7 — MASSARELOS — PORTO
Telefone 69 12 45

Mais de 50 anos de experiência

CONSTRUÇÕES
CIVIS E INDUSTRIAIS
BETÃO
ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO
CARPINTARIA
ESTUQUES
PINTURAS

BLOCOS DE ALVENARIA
E PAVIMENTO

BETÕES DE ISOLAMENTO
E DE ENCHIMENTO

BETÕES RESISTENTES
E REFRACTÁRIOS

PRÉFABRICADOS

PAINEIS PAREDE

Leca

Leca

ARGILA EXPANDIDA
O INERTE RESISTENTE, LEVE, ISOLANTE

Leca

ARGILEX S. A. R. L.
Av. António Augusto de Aguiar, 150 F. 2.° E.
Telef. 4 78 62 LISBOA 1

**ELECTRO-ARCO, L.DA**

**ELÉCTRODOS ✻ POSTOS ✻ ACESSÓRIOS**
PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

★

MATERIAL APROVADO PELOS
*LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING*
*BUREAU VERITAS*
*GERMANISCHER LLOYD*

LISBOA
Rua Silva Carvalho, 239
Telefs. 68 36 49 - 68 49 93
FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Venda Nova — Amadora
Telefs. 97 06 13 - 97 17 33
PORTO
Rua do Bolhão, 216
Telefs. 2 12 77 - 39 44 73

**Já pensou...**

... que o seu anúncio
é muito eficaz se for
publicado na revista que
os seus clientes lêem?
Os milhares de exemplares
de cada número da nossa revista
são lidos por engenheiros
e técnicos, por pessoas ligadas
à indústria, à investigação, ao
ensino, pelos seus clientes,
em suma. Consulte-nos

**técnica** REVISTA DE ENGENHARIA

Avenida Rovisco Pais - Lisboa 1 - Telef. 73 15 49

C. D. U. 621.316.7-523.8

SIMATIC C3, un système de commande à circuits TTL intégrés — *G. Rath, W. Ritter*
Rev. Siemens 30 (1972) N.° 4, págs. 170 à 176

C. D. U. 621.316.7-523.8

Systèmes modulaires SIMATIC:
vue d'ensemble et expérience pratique — *R. Hahn, H. J. Krüger*
Rev. Siemens 30 (1972) N.° 2, págs. 61 à 65

C. D. U. 621.316.7 — 523.8:661.721.(430.1-37.51—21)

Installations de commande et de contrôle SIMATIC dans une installation de production de méthanol — *G. Macier; A. Spindler*
Rev. Siemens, Abril de 1971, págs. 99-105

C. D. U. 621.316.925.45-523.8

Dispositif électronique de protection de distance à caractéristique de déclenchemont polygonale — *E. Zurowski*
Rev. Siemens 30 (1972) N.° 4, págs. 180 à 183

C. D. U. 621.317.2.027.3:377.5:62(430.1-37.513-21)

Le laboratoire haute tension du département de Kaisorslautern de l'Ecole supérieure des sciences de l'ingénieur de Rhénanie-Palatinat — *D. Hrabal*
Rev. Siemens 30 (1972) N.° 6, págs. 257 à 261

C. D. U. 621.317-523.8:654.93:681.3

Mémoires életroniques pour installations d'édition de procés-verbaux de comptage — *H. Amberg*
Rev. Siemens, Maio de 1971, pág. 151

C. D. U. 621.355:621.314.6:621.33:625.4
(430.1 - 37.6 - 21)

Chargeur à thyristors pour les chemis do fer métropolitains de Munich — *M. Kuntner*
Rev. Siemens, Maio de 1971, pág. 176

C. D. U. 621.375:621.317

Nouveaux amplificateurs de mesure de grandeurs électriques ou non électriques — *H. Sima*
Rev. Siemens 30 (1972) N.° 2, págs. 47 à 50

C. D. U. 621.383

Composants optoélectroniques — *G. Hatzinger*
Rev. Siemens 30 (1972) N.° 2, págs. 83 à 89

C. D. U. 621.394.74.018.78:621.317.74:551.509.2

Banc de mesure automatique de distorsion télégraphique 8K1 utilisé par le service métorologique de la R. F. A. —*H. Fielstette*
Rev. Siemens 30 (1972) N.° , págs. 76 à 80

C. D. U. 621.395.44:621.372.54

Le modulateur de voie à filtres électromécaniques
*K. Ey et al*
Rev. Siemens 30 (1972) N.° 6, págs. 237 à 243

C. D. U. 621.395.348:621.395.44

Equipement à courants porteurs Z1T permettant le raccordement indépendant de deux abonnés téléphoniques sur une ligne unique — *G. Reiter e B. Stummer*
Rev. Siemens 30 (1972) N.° 2, págs. 72 à 75

C. D. U. 621.382.3

Transistors plamar DNP au silicium épitoxiés — *M.Aret; H. Gückel*
Rev. Siemens Abril de 1971, Pág. 128

C. D. U. 621.382.3

Transistors vidés à tension inverse élevée — *J. Dathe*
Rev. Siemens, Maio de 1971, págs. 178-181

C. D. U. 621.395.73.083

Mesures d'exploitation automatiques sur voies téléphoniques — *J. Beck*
Rev. Siemens, Abril de 1971, págs. 121-126

C. D. U. 621.395.623.8:534.86

Haurt-parle de studio EUROPHOW — *E. Kammere*
Rev. Siemens, Abril de 1971, vol. 1971, pág. 134

C. D. U. 621.72-233

Forcing of axle ends and bearing elements for dead rear axles for trucks — W. Kornteheur
Metalurgica and Metal Forming 39 (1972) 121

C. D. U. 621.873.12-83

Electrical equipment for 450-ton shipyard gantry crane — *R. Claesson*
ASEA Journal 44 (1971): 2, págs. 41-45

C. D. U. 621.967-5:621.771.23

Régulation et automatisation de lignes de cisaillage dans les laminoirs à tôles fortes — *K. Koopmann; H. Ferner*
Rev. Siemens 30 (1972) N.° 4, pág. 159 à 165

C. D. U. 628.5

Contaminacion ambiental
Hierro y Acero — vol. 5, 1 (1972) 17

C. D. U. 066

I traghetti «Canguro» a propulsione electtrica — *L. Bonaria e outros*
MARBELLI, 4.° trimestre vol. 4, págs. 11-34

C. D. U. 629.19:550.3:531.55:681.3

Visualisation de l'orbite de satellites à l'aide d'un faisceau laser — *J. Brodkorb*
Rev. Siemens, Abril de 1971, págs. 126-128

C. D. U. 629.19:621.396:341.16

INTELSAT — The international telecommunications satellite consortium — *F. D. Taylor*
Electronics and Power, Janeiro de 1971, vol. 17, págs. 8-13

C. D. U. 669.041

Furnace Technology
Metallurgia and Metal Forming 39 (1972) 273

C. D. U. 669.046

Gas fired rapid heating in the spring manufacturing industry — *J. Masters et al*
Metallurgia and Metal Forming 39 (1972) 269

C. D. U. 681.32:62

Los ordenadores de procesos — *Rafael Magallon Martinez*
Anales de mecanica y electricidad, Outubro de 1972, vol. 42, N.° 5, págs. 53-62

C. D. U. 681.327.8:621.395

Recherches experimentales sur la distribution des erreurs télégraphiques dans la transmission par courants porteurs sur ligno H7 — *Boris Saki e Munir Ritran*
Revue Brown-Boveri, Julho de 1970, vol. 57, N.° 6-7 págs. 289-296

# VIGAS DE EIXO ORTOQUEBRADO COM APOIOS DESNIVELADOS

## CORRIGENDA

| Página | Linha | Coluna | onde está | deve estar |
|---|---|---|---|---|
| 203 | 16 | 1 | camprimento | comprimento |
| 204 | 14 | 1 | $\frac{gl^3}{2\ EI} \sum_{i=1}^{i=(n-1)} \left(\frac{i}{n}\right)^3$ | $\frac{gl^3}{2\ EI} \frac{h}{n-1} \sum_{i=1}^{i=(n-1)} \left(\frac{i}{n}\right)^3$ |
| 204 | última | 2 | $-F\ i\ x - \frac{i(i-1)l}{2\ n}$ | $-F\left[ix - \frac{i(i-1)l}{2\ n}\right]$ |
| 205 | 8 | 1 | $N = F\ i$ | $N = -F\ i$ |
| 205 | 10 | 2 | $-\frac{i(i-1)l}{4\ n}\left[\frac{i^2\ l^2}{n^2} - \frac{(i-)^2\ l^2}{n^2}\right] =$ | $-\frac{i(i-1l}{4\ n}\left[\frac{i^2\ l^2}{n^2} - \frac{(i-l)^2\ l^2}{n^2}\right]\Bigg\} =$ |
| 205 | última | 2 | $+\frac{l^2}{2n^2}\ \frac{h}{n-1} \sum_{i=l}^{l=n-1} i^2 =$ | $+\frac{l^2}{2n^2}\ \frac{h}{n-1} \sum_{i=l}^{i=n-1} i^2 \Bigg\} =$ |
| 206 | 8 | 1 | $\frac{I}{l\ I_l}$ | $\frac{I}{I\ l_h}$ |
| 206 | 4 | 2 | 685000 cm3 | 685000 cm4 |
| 208 | 4 | 1 | $\frac{gl^4}{384\ E\ I_l}$ | $\frac{gl_4}{384\ E\ I_h}$ |
| 208 | 10 | 1 | $l = l\ n$ | $l = b\ n$ |
| 208 | 12 | 1 | $(3 + k)$ | $(5 + k)$ |
| 208 | 20 | 1 | concui-se | concluiu-se |
| 208 | 23 | 1 | $\frac{5\ gl^4}{384\ E\ 1_l}$ | $\frac{5\ gl^4}{384\ E\ I_l}$ |
| 208 | 2 | 2 | $k = \frac{a}{b}\ \frac{5\ n^4}{(n^2-1)\ ((5n^2+3)}$ | $k = \frac{a}{b}\ \frac{(n^2-1)(5n^2+3)}{5\ n^4}$ |
| 208 | última | 2 | $\frac{Fl}{8m}$ | $\frac{Fl}{8n}$ |
| 208 | última | 2 | $\frac{n^2-1}{8m}$ | $\frac{n^2-1}{8n}$ |
| 209 | 2 | 1 | $-i\ (i-1) =$ | $-i\ (i-1)\Big] =$ |
| 210 | 1 | 1 | $+\frac{(1-1)i}{4}\ \frac{Fl}{n}\Big]\ dx =$ | $+\frac{(i-1)i}{4}\ \frac{Fl}{n}\Big]\ dx\ \Big\} =$ |
| 210 | 8 | 1 | $-\frac{6}{n+2} +$ | $-\frac{n+2}{6} +$ |

| Página | Linha | Coluna | onde está | deve estar |
|---|---|---|---|---|
| 211 | 2 | 2 | $\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^2 =$ | $\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^2 \Big\} =$ |
| 211 | 20 | 2 | sujeitos a acção | sujeita à acção |
| 212 | última | 2 | $-\left[\frac{n}{2} + \frac{1}{6n^2}\left(\frac{n}{2}\right) + \right.$ | $-\left[\frac{n}{2} + \frac{1}{6n^2}\left(\frac{n}{2}\right) \times \right.$ |
| 213 | 14 | 1 | $\frac{1}{n} \sum_{i=i}^{i=\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ | $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ |
| 213 | 5 | 2 | $\frac{M_{1-2}\ l\ h\ (n^2-1)}{16n(n=1)\ E\ I_h}$ | $\frac{M_{1-2}\ l\ h\ (n^2-1)}{16n(n-1)E\ I_h}$ |
| 214 | 5 | 1 | temos | temos, nos |
| 214 | 15 | 1 | $\frac{gl^3\ h}{2n^3\ (n-1)I_h}$ | $\frac{gl^3\ h}{2n^3\ (n-1)I_h} \times$ |
| 214 | 16 | 1 | $\sum_{i=1}^{i=n-1}$ | $\times \sum_{i=1}^{i=n-1}$ |
| 214 | 17 | 1 | $\frac{F_l}{I_l}\ \frac{l^3}{3}$ | $\frac{R_l}{I_l}\ \frac{l^3}{3}$ |
| 215 | 12 | 2 | $\frac{F}{8n}\ (n^2-1)\Big] -$ | $\frac{F}{8n}\ (n^2-1)\Big] =$ |
| 215 | 13 | 2 | $-\frac{l^3}{24\ EI_l}$ | $-\frac{l^3}{24\ I_l}$ |
| 215 | 13 | 2 | $\frac{l^3}{3\ EI_l} \times$ | $\frac{l^3}{3\ I_l} \times$ |
| 216 | 2 | 1 | $\frac{24\ n\ I_l}{1}$ | $\frac{1}{24\ n\ I_l}$ |
| 216 | 7 | 2 | $\frac{b\ l}{2\ I_l}$ | $\frac{g\ l}{2\ I_l}$ |
| 216 | última | 2 | $\frac{a\ I_f}{b\ I_h}$ | $\frac{a\ I_l}{b\ I_h}$ |
| 217 | 3 | 2 | $i\ (i-1)\ \Delta\ y$ | $i(i-1)\ \Delta\ y\ \Big\}$ |
| 217 | 12 | 2 | $\frac{F\ l^2}{2\ n^2}$ | $\frac{F\ l^2}{2\ n^2} \times$ |
| 217 | 13 | 2 | $\sum_{i=1}^{i=n}$ | $\times \sum_{i=1}^{i=n}$ |

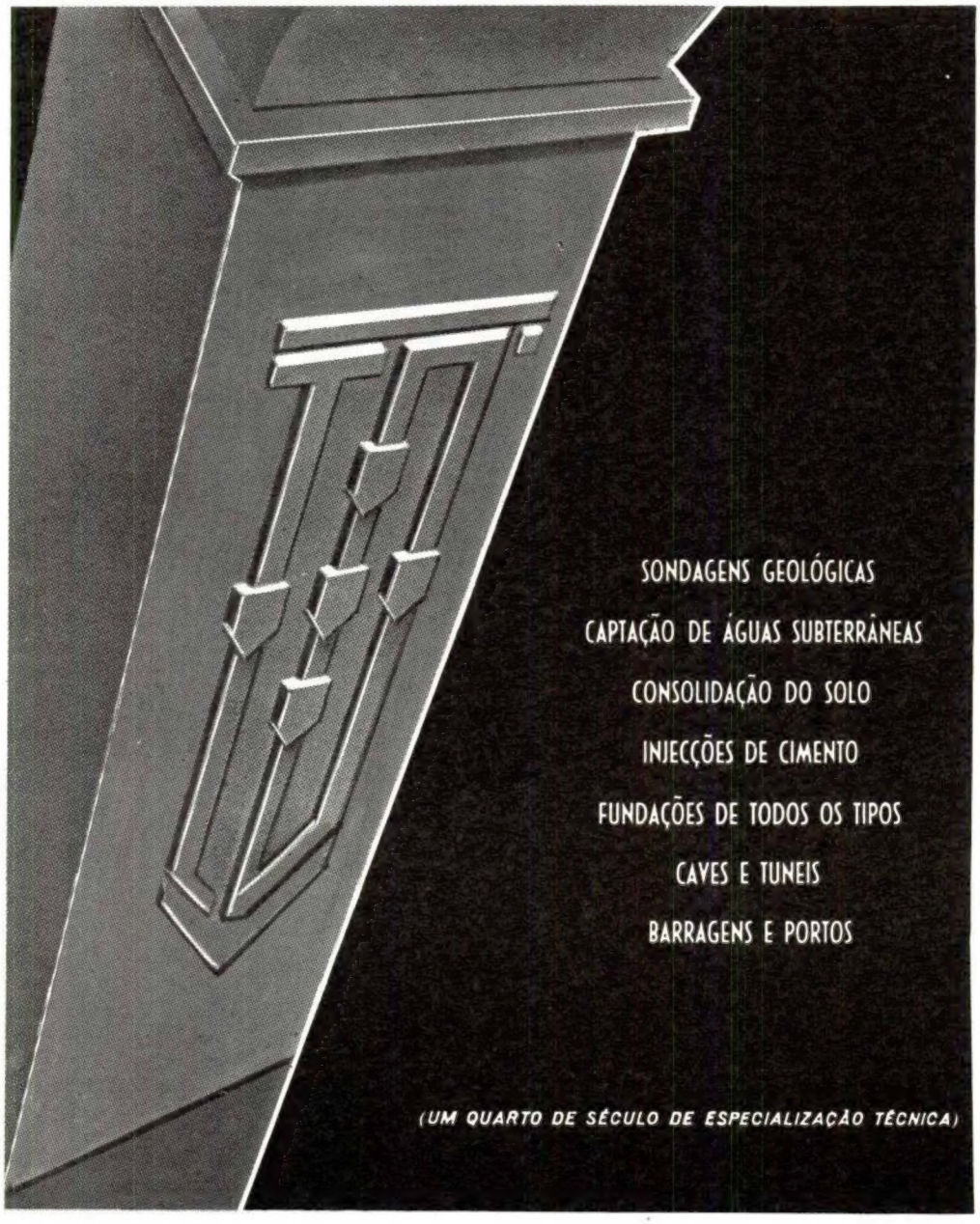
| Página | Linha | Coluna | onde está | deve estar |
|---|---|---|---|---|
| 217 | 14 | 2 | $= \frac{F\,l^2}{2\,n^2}\,\frac{1}{3}\,n(n+1)$ | $= \frac{F\,l^2}{2\,n^2}\left[\frac{1}{3}\,n(n+1)\right.$ |
| 217 | 15 | 2 | $+\,n =$ | $\left.+\,n\right] =$ |
| 218 | 9 | 1 | $\frac{2\,n}{F\,l}$ | $\frac{F\,l}{2\,n}$ |
| 218 | 14 | 1 | $\frac{l\,n^2 - 1}{n\,l_1}$ | $\frac{l(n^2-1)}{n\,l_1}$ |
| 219 | 7 | 2 | $-\,\frac{l_1}{l_1}$ | $= \frac{El_1}{l}$ |
| 219 | 8 | 2 | $\frac{R_1\,l}{3}$ | $\frac{2\,R_1\,l}{3}$ |
| 219 | 10 | 2 | $= \frac{3}{2\,l}\,M_{1-2}\,\frac{1}{(1+k)(1+k-\frac{k}{2\,n}}$ | $-\,\frac{3}{2\,l}\,M_{1-2}\,\frac{1}{(1+k)(1+k-\frac{k}{2\,n})}$ |
| 219 | 11 | 2 | $= \frac{E\,l_1}{l}$ | $= \frac{E\,l_1}{l}$ |
| 219 | 12 | 2 | $\frac{6\,E\,l}{2(1+k-\frac{2\,k}{n})}$ | $\frac{6\,E\,l_1}{l^2\,(1+k)-\frac{2\,k}{n}}$ |
| 219 | 15 | 2 | $M_{2-} = \frac{-\,2El_1\,(1+k+\frac{k}{n}}{l(1+k)(-+k-\frac{2k}{n})}$ | $M_{2-1} = \frac{-\,2El_1\,(1+k+\frac{k}{n})}{l_1\,(1+k)(1+k-\frac{2k}{n})}$ |
| 221 | 11 | 2 | $-\,(M_{1-2} + \eta\,M_{2-1}) -$ | $-\,(M_{1-2} + \eta\,M_{2-1}) =$ |
| 221 | 12 | 2 | $1+k+\frac{k}{n}$ | $(1+k+\frac{k}{n})$ |

# Empresa de Sondagens e Fundações

# TEIXEIRA DUARTE, L.DA

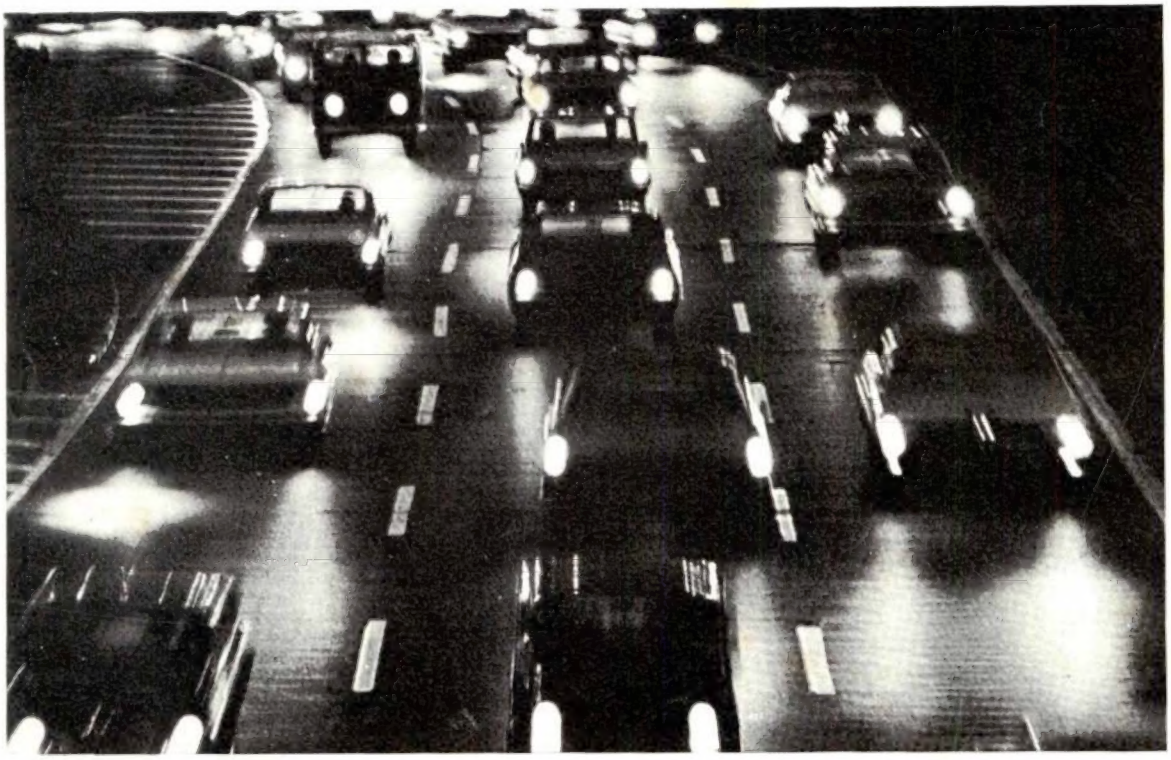
AV. DA REPÚBLICA, 42, 8.º
TELEFS. 77 70 86/7 e 77 12 65

**LISBOA**



# ARRANQUE INSTANTÂNEO

# TORRENTES DE LUZ



COM BATERIAS - PILHAS SECAS

# TUDOR

**novas instalações de vendas e assistência técnica:**

em **LISBOA** · **R. Alferes Malheiro, 5 A-B Tel. 73 06 81** (À AV. BRASIL)
no **PORTO** · **Av. da Boavista, 746-754 Tel. 694049**